

Дроботова И.А. студентка гр Д-12-18

УРАВНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА НИЗКИХ ЧАСТОТ

Постановка задачи. Рассматривается цепочка грузов массой m каждый, соединенных одинаковыми пружинами жесткостью C (рис.1). Считаем последний груз неподвижным. На первый груз действует периодическая сила по закону $F = C_0 u_0 \sin \omega t$. В качестве координаты x_k для k -того груза выберем смещение его от положения равновесия, при котором пружины не деформированы.

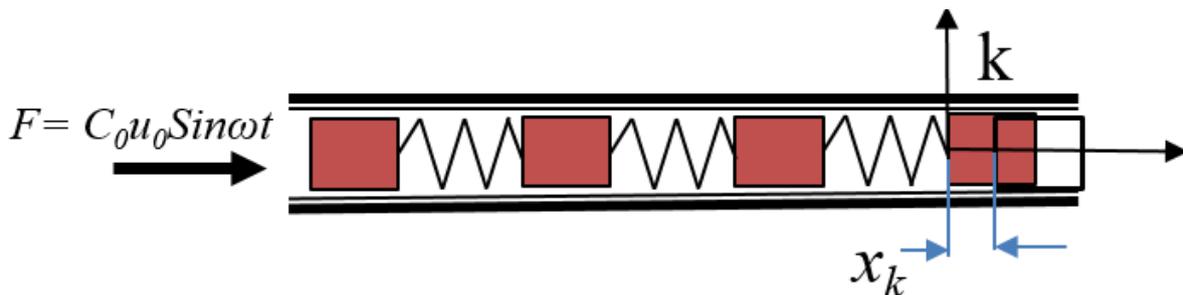


Рис.1

Уравнение движения первого груза будут иметь вид

$$m\ddot{x}_1 = C_0(u - x_1) - C(x_1 - x_2)$$

Уравнения движения k -того груза будут иметь вид

$$m\ddot{x}_k = C(x_{k-1} - x_k) - C(x_k - x_{k+1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

После преобразований и замены, получим уравнения движения грузов

$$m\ddot{x}_1 + (C_0 + C)x_1 = Cx_2 + C_0 u_0 \sin \omega t$$

$$m\ddot{x}_k + 2Cx_k = C(x_{k-1} + x_{k+1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

Найдем закон вынужденных колебаний k - того груза в виде

$$x_k = A e^{k\lambda} \sin \omega t$$

Определим параметр λ путем подстановки закона в уравнение для движения k - того груза

$$e^{2\lambda} - 2 \left(1 - \frac{m\omega^2}{2C} \right) e^\lambda + 1 = 0$$

Корнями уравнения будут

$$e^{\pm\lambda} = \left(1 - \frac{m\omega^2}{2C} \right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{2C} \right)^2 - 1}$$

Рассмотрим два случая

$$1) \quad 0 < \omega < 2\sqrt{\frac{C}{m}} \quad \text{и} \quad 2) \quad \omega > 2\sqrt{\frac{C}{m}}$$

В первом случае

$$x_k = \frac{\sin(n-k)\varphi}{\left(\frac{C_o}{C} - 1 \right) \sin(n-1)\varphi + \sin n\varphi} \frac{C_o}{C} u_o \sin \omega t$$

Это закон вынужденных колебаний грузов фильтра. При $C = C_o$ получим

$$x_k = \frac{\sin(n-k)\varphi}{\sin n\varphi} u_o \sin \omega t$$

Во втором случае

$$x_k = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(n-k)\theta}{-\left(\frac{C_o}{C} - 1 \right) \operatorname{sh}(n-1)\theta + \operatorname{sh}n\theta} \frac{C_o}{C} u_o \sin \omega t$$

Это закон вынужденных колебаний грузов фильтра.

При $C = C_o$ получим решение

$$x_k = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(n-k)\theta}{+\operatorname{sh}n\theta} u_o \sin \omega t$$

Отсюда видно, что при достаточно большом n и при значениях k , близких к n , амплитуды вынужденных колебаний грузов будут очень малы по сравнению с u_0 .

Вывод. Таким образом, колебаний с частотой $\omega > 2\sqrt{\frac{C}{m}}$ фильтр не пропускает.

Научный консультант: Солодов В.Г., зав. каф. теоретической механики и гидравлики