Балбекін І.А., Захарченко М.Р., студенти групи Д- 22, Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНОГО ФОРМАЛІЗМУ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ

Використання символічних методів алгебри матриць та квадратичних форм в механіці певною мірою відрізняється від загальноприйнятих. З іншого боку такі методи дозволяють скоротити теоретичні розрахунки та представлення їх результатів. Покажемо це, на прикладі загального рівняння динаміки і рівнянь Лагранжа.

Природно перед тим як перейти до суті стисло розглянути математичний апарат, що буде використовуватися надалі.

Матрицею розміру $m \times n$ називають таблицю чисел (скалярів)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Скаляри a_{ik}, що розташовані в i-тому рядку і в k-тому стовпчику називаються елементами матриці [10, 22, 25, 44].

Матриця $\mathbf{A}$ називається дійсною, якщо всі її елементи дійсні числа і комплексною, якщо всі її елементи комплексні числа. Надалі будемо вважати матриці дійсними, якщо не вказано протилежне.

Матриця розміром $n \times 1$ називається стовчиком, а матриця розміром $1 \times n$ - рядком. Будемо використовувати наступні означення

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{або } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця розміром $n \times n$ називаться *квадратною матрицею*. Квадратна матриця $\mathbf{A}$ називається трикутною, якщо при $i > k$ елемент $a_{ik} = 0$; *діагональною матрицею*, якщо при $i \neq k$ елемент $a_{ik} = 0$; *мономіальною матрицею*, якщо в кожній її рядку і в кожному стовпчику лише один ненульовий елемент.

Операції над матрицями визначаються за допомогою операцій над їх елементами. Дві матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ розміром $m \times n$ дорівнюють одна одній ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$) тоді і тільки тоді, коли $a_{ik} = b_{ik}$ для всіх i і k. Сумою двох матриць розміру $m \times n$ ($\mathbf{A} + \mathbf{B}$) є матриця $\mathbf{C}$ розміром $m \times n$ така, що

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Добутком матриці $\mathbf{A}$ розміром $m \times n$ на скаляр α є матриця $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}$ розміром $m \times n$ така, що

$$b_{ik} = \alpha a_{ik}.$$

Добутком матриці $\mathbf{A}$ розміром $m \times n$ на матрицю $\mathbf{B}$ розміром $n \times r$ є матриця $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ розміром $m \times r$ така, що

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Таким чином, елемент матриці $\mathbf{C}$ є сумою добутків елементів i-ого рядка матриці $\mathbf{A}$ на відповідні елементи k-того стовпчика матриці $\mathbf{B}$. В кожному добутку матриць число стовпчиків матриці, що стоїть у добутку ліворуч, повинно дорівнювати числу рядків матриці, що стоїть праворуч (форма матриць повинна бути узгодженою).

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \alpha\left(\beta \mathbf{A}\right) = \left(\alpha\beta\right)\mathbf{A}, \alpha\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B},\\
&\mathbf{A}\left(\mathbf{BC}\right) = \left(\mathbf{AB}\right)\mathbf{C}, \mathbf{A}\left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA},\\
&\alpha\left(\mathbf{AB}\right) = \left(\alpha\mathbf{A}\right)\mathbf{B} = \mathbf{A}\left(\alpha\mathbf{B}\right), \left(\alpha + \beta\right)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A},\\
&\mathbf{A} + \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right) = \left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right) + \mathbf{C}.
\end{aligned}$$

Нульова матриця $\mathbf{O}$ розміром $m \times n$ це матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю. Тоді

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}, \mathbf{OA} = \mathbf{O}, \mathbf{OB} + \mathbf{CO} + \mathbf{O},$$

де $\mathbf{A}$ - довільна матриця розміром $m \times n$, $\mathbf{B}$ - довідьна матриця, що має n рядків, і $\mathbf{C}$ - довільн матриця, що має n стовпчиків.

Адитивно зворотня (протилежна) матриця $-\mathbf{A}$ для матриці $\mathbf{A}$ розміром $m \times n$ є матриця розміром $m \times n$ така, що

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{A}+(-1)\mathbf{A}=\mathbf{O}.$$

Одинична матриця $\mathbf{I}$ є діагональна матриця розміром $n\times n$ з одиничними діагональними елементами. Тоді

$$\mathbf{IB}=\mathbf{B},\mathbf{CI}=\mathbf{C},$$

де $\mathbf{B}$ - довільна матриця, що має n рядків, а $\mathbf{C}$ - довільна матриця, що має n стовпчиків.

Мультипликативно зворотня (зворотня) матриця $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $\mathbf{A}$ розміром $n\times n$ є матриця розміром $n\times n$ така, що

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}.$$

Зауважимо, що

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},(\alpha\mathbf{A})^{-1}=\alpha^{-1}\mathbf{A}^{-1},\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}.$$

Матриця $\mathbf{A}'$ транспонована по відношенню до матриці $\mathbf{A}$ розміром $m\times n$ з елементами a_{ik} є матриця розміром $n\times m$ з елементами a_{ki}. Виконуютья наступні співвідношеня:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}',(\alpha\mathbf{A})'=\alpha\mathbf{A}',(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}',$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)'=(\mathbf{A}')^{-1},(\mathbf{A}')'=\mathbf{A}.$$

Квадратна матриця $\mathbf{A}$ називається симетричною, якщо $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$, кососиметричною, якщо $\mathbf{A}'=-\mathbf{A}$, ортогональною, якщо $\mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1}$.

Квадратичною формою прийнято називати добуток

$$\mathbf{xAx}=x_i a_{ik} x_k,$$

де $\mathbf{x}$ - матриця-рядок, якщо стоїть ліворуч від квадратної матриці $\mathbf{A}$, або матриця-стовпчик, якщо стоїть праворуч.

$$\mathbf{xAx}=x_i a_{ijk} x_k,\mathbf{xxA}=x_i x_j a_{ijk},\mathbf{Axx}=a_{ijk} x_j x_k.$$

Диференціали скалярів, стовпчиків (рядків) і матриць повинні задовільняти наступним вимогам. Диференціали є матрицями того самого рангу і типу. Диференціал скаляра

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

де $\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}}$ - рядок розміром n, що складається з часткових похідних $\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}$ і називається градієнтом скалярної функції, а $d\mathbf{x}$ - стовпчик з диференціалів змінних dx^i. Диференціал матриці

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

де $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}}$ - градієнт матриці.

Також мають виконуватися наступні правила:

$$d\left(\alpha \mathbf{A}\right) = \mathbf{A} d\alpha + \alpha d\mathbf{A}, d\left(\mathbf{AB}\right) = \mathbf{A} d\mathbf{B} + \mathbf{B} d\mathbf{A},$$
$$d\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right) = d\mathbf{A} + d\mathbf{B}.$$

Можливим переміщенням механічної системи $\delta \mathbf{x}$ називають довільне нескінченно мале змінення її конфігурації, узгоджене з в'язями накладеними на неї в даний момент часу. Розіб'ємо стовпчик, складений з проекцій сил на вісі координат, одна з яких відповідає активним силам, а друга – реакціям в'язей:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}.$$

Якщо система знаходиться в рівновазі, то

$$\mathbf{F}^a \delta \mathbf{x} + \mathbf{R} \delta \mathbf{x} = 0.$$

У випадку, коли на систему накладені ідеальні в'язі, одержуємо:

$$\mathbf{F}^a \delta \mathbf{x} = 0.$$

Рівняння руху системи можна записати у вигляді

$$\mathbf{F} - \dot{\mathbf{p}} = 0$$

і трактувати його як умову рівноваги. Тут $\mathbf{p}$ це стовпчик, що складається з проекцій імпульсів.

Остаточно будемо мати

$$\left(\mathbf{F}^a - \dot{\mathbf{p}}\right)\delta\mathbf{x} = 0.$$

Одержане рівняння називають загальним рівнянням динаміки.

При вивченні руху механічної системи в залежності від умов задачі можна вибрати замість декартових кординат інші. Будь які s величин $q_1, q_2...., q_s$, що повністю визначають положення системи у кожен момент часу, називають узагальнинеми координатами, а похідні за часом $\dot{q}_1, \dot{q}_2...., \dot{q}_s$ - її узаганинеми швидкостями.

Перехід до узагальнених координат у випадку, коли на систему накладені голономні в'язі, відбувається за допомогою співвідношення

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(\mathbf{q}, t\right).$$

Швидкості, відповідно, будуть пов'язані наступним чином

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t},$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}$ - матриця перетворення координат розміром s на $3n$.

Можливі переміщення пов'язані співвідношенням

$$\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{q}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Віртуальна робота сил виражається через узагальнені сили за формулою

$$\mathbf{F}\delta\mathbf{x} = \mathbf{Q}\delta\mathbf{q},$$

де

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}.$$

З іншого боку,

$$\dot{\mathbf{p}}\delta\mathbf{x} = \ddot{\mathbf{x}}\mathbf{M}\delta\mathbf{x} = \left(\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{x}}\mathbf{M}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{q}}\right) - \dot{\mathbf{x}}\mathbf{M}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{q}}\right)\right)\delta\mathbf{q},$$

де $\mathbf{M}$ - діагональна матриця, складена мас матеріальних точок системи.

В останньому члені можна змінити порядок диференціювання і скористатись очевидним співвідношенням

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{q}} = \frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}.$$

Одержимо,

$$\ddot{\mathbf{x}}\mathbf{M}\delta\mathbf{x} = \left(\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{x}}\mathbf{M}\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right) - \dot{\mathbf{x}}\mathbf{M}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{q}}\right)\right)\delta\mathbf{q}.$$

Кінетична енергія системи

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}.$$

Враховуючи голономність в'язей можно скористатися незалежністю узагальнених координат, можна записати рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{dT}{d\mathbf{q}} = \mathbf{Q}.$$

Таким чином, ми скористалися матричним формалізмом для одержання в стислому вигляді принципу можливих переміщень, загального рівняння динаміки і рівнянь Лагранжа.

Література

1. Голдстейн Г. Классическая механіка – Из-во «Наука», 1975.

Науковий консультант: Біловол О.В., доц. каф. теоретичної механіки і гідравліки.