

# **Фундаментальні та прикладні дослідження**

**Fundamental and applied studies**



**Ю. В. БАТЫГИН, Е. Ф. ЕРЕМИНА, Е. А. ЧАПЛЫГИН, В. А. СТРЕЛЬНИКОВА**

# **ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ИНСТРУМЕНТАХ МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ ПРОПУСКАНИИ ТОКА ЧЕРЕЗ ОБРАБАТЫВАЕМЫЙ МЕТАЛЛ**

С помощью математического аппарата теории электромагнитных полей получены аналитические выражения, позволяющие рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, возбужденного инструментом магнитно-импульсного притяжения при прямом пропускании тока через обрабатываемый металл, линейную плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом, а также интегральную силу притяжения, возбуждаемую при взаимодействии параллельных токов. Полученные решения поставленной электродинамической задачи позволяют рассматривать процессы в реальных инструментах магнитно-импульсного притяжения.

**Ключевые слова:** магнитно-импульсное притяжение, токопровод, листовой металл, линейная плотность тока, аналитические зависимости, математическая модель.

**Ю. В. БАТЫГІН, О. Ф. ЄРЬОМІНА, Є. О. ЧАПЛИГІН, В. А. СТРЕЛЬНИКОВА**

# **ЭЛЕКТРОДИНАМИЧНІ ПРОЦЕСИ В ІНСТРУМЕНТАХ МАГНІТНО-ІМПУЛЬСНОГО ТЯЖІННЯ ПРИ ПРЯМОМУ ПРОПУЩЕННІ СТРУМУ ЧЕРЕЗ МЕТАЛ, ЩО ОБРОБЛЯЮТЬ**

За допомогою математичного апарату теорії електромагнітних полів отримано аналітичні вирази, що дозволяють розрахувати розподіл струму в поперечному перерізі листового металу, збудженого інструментом магнітно-імпульсного притягання при прямому пропусканні струму через оброблюваний метал, лінійну густину сумарного струму в листовому металі в зоні під основним струмопроводом, а також інтегральну силу притягання, що збуджується при взаємодії паралельних струмів. Отримані рішення поставленої електродинамічної задачі дозволяють розглядати процеси в реальних інструментах магнітно-імпульсного притягання.

**Ключові слова:** магнітно-імпульсне притягання, струмопровід, листовий метал, лінійна густина струму, аналітичні залежності, математична модель.

**YU. V. BATYGIN, O. F. YERYOMINA, E. O. CHAPLYGIN, V. A. STRELNIKOVA**

# **ELECTRODYNAMIC PROCESSES IN INSTRUMENTS OF MAGNETIC-PULSE ATTRACTION AT DIRECT CURRENT PASSING THROUGH THE HANDLED METAL**

With the help of the mathematical apparatus of the theory of electromagnetic fields, a study was conducted of electrodynamic processes in magnetic-pulse attraction instruments with direct current passing through the metal being processed. Analytical expressions are obtained that allow one to calculate the current distribution in the cross section of sheet metal, where a superposition of induced and extraneous current takes place, and relations are found for the linear density of the total current in the sheet metal in the zone under the main conductor, as well as the integral force of attraction induced by the interaction of parallel currents. The obtained solutions of the set electrodynamic problem adequately describe the processes in the tool of magnetic-pulse attraction and can be used in the design of real structures of tools, and the analysis of the dependencies found for the characteristics of the flowing processes will allow establishing requirements that will ensure not only which efficiency but also the efficiency of the tool.

**Key words:** magnetic-pulse attraction, conductor, sheet metal, linear current density, analytical dependencies, mathematical model.

**Введение.** Исследование электродинамических процессов предполагает постановку и решение задач, конечным результатом которых должны стать физико-математические зависимости для характеристик протекающих процессов, в условиях интенсивного проникновения действующих электромагнитных полей.

Как представляется априори, анализ этих зависимостей позволит установить требования, выполнение которых обеспечит не только дееспособность, но и эффективность инструмента, имеющего предлагаемый принцип действия.

**Анализ последних исследований.** При решении будем следовать алгоритмам, представленным и развитым в работах [1, 2].

Справедливости ради следует отметить, что подобная задача уже рассматривалась авторами научных изданий [3, 4]. Однако непосредственное использование полученных ими формул и соотношений для проведения настоящих расчётов не представляется возможным, ввиду ограниченности найденных результатов условиями постановки и решения задач.

**Постановка задачи.** Для анализа электромагнитных процессов примем расчётную модель (рис. 1), соответствующую поперечным сечениям системы в ортогональных направлениях.

Сформулируем допущения, вполне адекватные реальности и позволяющие получить аналитические зависимости в квадратурах:

- Заготовка представляет собой листовой немагнитный металл с достаточно большими поперечными размерами, толщиной  $d$  и удельной электропроводностью  $\gamma$ .
- Основной токопровод прозрачен для действующих полей, так что его металл не оказывает никакого влияния на протекающие электромагнитные процессы.
- Имеет место геометрическая симметрия системы относительно координатной плоскости  $ZOX$ .
- Вдоль оси абсцисс система обладает достаточно большой протяжённостью, так что  $\frac{\partial}{\partial x}[\dots] = 0$ .

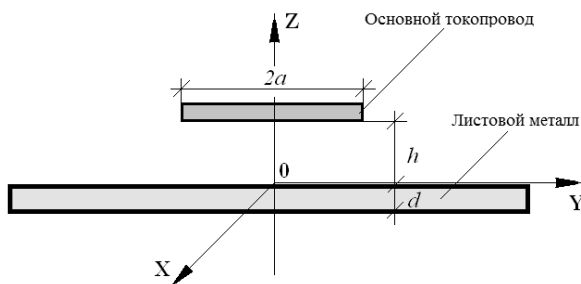


Рис. 1 – Расчётная модель.

• В основном токопроводе в направлении оси  $OX$  течёт равномерно распределённый ток с плотностью  $j(t) = j_m \cdot j_t(t)$ , где  $j_m = I_m / 2a$  – это амплитуда ( $I_m$  – максимум тока);  $j(t)$  – временная зависимость.

• Частотные характеристики возбуждающего тока таковы, что выполняется условие квазистационарности по Ландау  $\frac{\omega}{c} \cdot b \ll 1$  [5]; здесь  $\omega$  – циклическая частота процесса;  $c$  – скорость света в вакууме;  $b$  – характерный размер системы.

• В системе возбуждается электромагнитное поле с ненулевыми компонентами напряжённости:  $E_x \neq 0$ ,  $H_{y,z} \neq 0$ .

**Математическая модель.** В рамках принятых допущений уравнения Максвелла для ненулевых составляющих напряжённости электромагнитного поля, преобразованных по Лапласу ( $L$  – преобразование) с учётом нулевых начальных условий принимают вид [5 – 7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z(p, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(p, y, z)}{\partial z} = j_x(p, y, z); \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x(p, y, z)}{\partial z} = -p\mu_0 H_y(p, y, z); \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x(p, y, z)}{\partial y} = p\mu_0 H_z(p, y, z), \end{cases} \quad (3)$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа;  $E_x(p, y, z) = L\{E_x(t, y, z)\}$ ;  $H_{y,z}(p, y, z) = L\{H_{y,z}(t, y, z)\}$ ;  $j_x(p, y, z) = L\{j_x(t, y, z)\}$ ;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

В общем случае плотность тока в правой части уравнения (1) записывается в следующем виде:

$$j_x(p, y, z) = (p \cdot \varepsilon_0 + \gamma) \cdot E_x(p, y, z) + j_{xi}(p, y, z), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $j_{xi}(t, y, z)$  – плотность тока в основном токопроводе;

$$j_{xi}(p, y, z) = j(p) \cdot f(y) \cdot \delta(z - h).$$

Здесь  $j(p) = j_m \cdot j_t(p)$ , где  $j_m = I_m / 2a$  – амплитуда;  $j_t(p) = L\{j_t(t)\}$ ,  $j_t(t)$  – временная зависимость возбуждающего тока;  $f(y)$  – функция поперечного распределения плотности тока;  $\delta(z)$  – импульсная функция Дирака.

При решении поставленной задачи в принятой модели расчёта следует выделить области с однородными электрофизическими характеристиками.

Геометрическая и электродинамическая симметрия исследуемой системы соответственно рис. 1 позволяет считать, что таковыми являются:

• свободное полупространство над листовым металлом заготовки со стороны основного токопровода, где  $z \in [0, \infty)$ ;

• область листового металла заготовки, где  $z \in [-d, 0]$ ;

• свободное полупространство с внешней стороны листового металла, где  $z \in (-\infty, 0]$ .

Из дифференциальных уравнений (1) – (3) с учётом выражения (4) получим уравнения для продольной компоненты напряжённости электрического поля  $E_x(p, y, z)$  в выделенных областях, а именно:

• для свободного полупространства с основным токопроводом,  $z \in [0, \infty)$ ,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = p \cdot \mu_0 \cdot j_x(p, y, z); \quad (5)$$

• для листового металла,  $z \in [-d, 0]$ ,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = \gamma \cdot E_x(p, y, z); \quad (6)$$

• для свободного полупространства с внешней стороны листового металла заготовки,  $z \in (-\infty, 0]$ ,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (7)$$

Для уравнений (5) – (7) применим *интегральное косинус-преобразование Фурье* [6, 7], допустимость которого обусловлена геометрической и электрической симметрией рассматриваемой задачи относительно плоскости  $ZOX$ .

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} E_x(p, y, z) = \int_0^{\infty} E_x(p, \lambda, z) \cdot \cos(\lambda y) d\lambda; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} j_x(p, y, z) = \int_0^{\infty} j_x(p, \lambda, z) \cdot \cos(\lambda y) d\lambda, \end{cases} \quad (9)$$

где  $j_x(p, \lambda, z) = \int_0^{\infty} j_x(p, y, z) \cdot \cos(\lambda y) dy = j(p) f(\lambda) \delta(z)$ ;  $f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} f(y) \cdot \cos(\lambda y) dy$ , и, согласно приня-

му допущению о равномерности распределения возбуждающего тока,  $f(\lambda) = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)}$ .

С учётом (8) и (9) соотношения (5) – (7) преобразуются к виду обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка [7]:

- для свободного полупространства с основным токопроводом,  $z \in [0, \infty)$ , получаем

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 E_x(p, \lambda, z) = K(p, \lambda) \cdot \delta(z-h), \quad (10)$$

где  $K(p, \lambda) = \mu_0 \cdot p \cdot j(p) \cdot f(\lambda)$ ;

- для листового металла,  $z \in [-d, 0]$ ,

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - q^2(p, \lambda) \cdot E_x(p, \lambda, z) = 0, \quad (11)$$

где  $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p \cdot \mu_0 \cdot \gamma}$  – параметр разделения, физический смысл которого – волновое число в немагнитном металле с удельной электропроводностью  $\gamma$ ;

- для свободного полупространства с внешней стороны листового металла заготовки,  $z \in (-\infty, 0]$ ,

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 \cdot E_x(p, \lambda, z) = 0. \quad (12)$$

Общие интегралы уравнений (10), (11) и (12) для выделенных областей имеют вид [6, 7]:

- в свободном полупространстве с основным токопроводом,  $z \in [0, \infty)$ , условию ограниченности при  $z \rightarrow \infty$  удовлетворяет функция

$$E_x^{(1)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) e^{-\lambda \cdot z} + \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \left( sh(\lambda(z-h)) \cdot \eta(z-h) - 0.5 e^{\lambda(z-h)} \right), \quad (13)$$

где  $C(p, \lambda)$  – произвольная постоянная интегрирования;

- в листовом металле,  $z \in [-d, 0]$ ,

$$E_x^{(2)}(p, \lambda, z) = D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot z} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot z}, \quad (14)$$

где  $D_{1,2}(p, \lambda)$  – произвольные постоянные интегрирования;

- в свободном полупространстве с внешней стороны листового металла заготовки,  $z \in (-\infty, 0]$ , условию ограниченности при  $z \rightarrow -\infty$  удовлетворяет функция:

$$E_x^{(3)}(p, \lambda, z) = B(p, \lambda) \cdot e^{\lambda(z+d)}, \quad (15)$$

где  $B(p, \lambda)$  – произвольная постоянная интегрирования.

Изображения касательных составляющих напряжённости магнитного поля удалось найти с помощью формул (13) – (15) и уравнения (3):

- $z \in [0, \infty)$ ,

$$H_y^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{\lambda}{p\mu_0} \left( C(p, \lambda) e^{-\lambda \cdot z} - \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \left( ch(\lambda(z-h)) \eta(z-h) - 0.5 e^{\lambda(z-h)} \right) \right); \quad (16)$$

- $z \in [-d, 0]$ :

$$H_y^{(2)}(p, \lambda, z) = -\frac{q(p, \lambda)}{p\mu_0} \cdot \left( D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot z} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot z} \right); \quad (17)$$

- $z \in (-\infty, d]$ ,

$$H_y^{(3)}(p, \lambda, z) = -\frac{\lambda}{p\mu_0} \cdot B(p, \lambda) \cdot e^{\lambda(z+d)}. \quad (18)$$

Из условия непрерывности касательных компонент напряжённости электромагнитного поля на границах выделенных областей получаем системы алгебраических уравнений для определения неизвестных произвольных постоянных интегрирования в выражениях (13) – (18):

при  $z = 0$ ,

$$\begin{cases} C(p, \lambda) - \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} = D_1(p, \lambda) + D_2(p, \lambda); \\ C(p, \lambda) + \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} = -\frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot (D_1(p, \lambda) - D_2(p, \lambda)); \end{cases} \quad (19)$$

при  $z = -d$ ,

$$\begin{cases} D_1(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot d} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot d} = B(p, \lambda); \\ \frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot (D_1(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot d} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot d}) = B(p, \lambda). \end{cases} \quad (20)$$

В дальнейшем нас будет интересовать возбуждение электромагнитного поля в листовом металле. Поэтому ограничимся определением неизвестных произвольных постоянных  $D_{1,2}(p, \lambda)$ .

Из системы линейных алгебраических уравнений находим, что

$$\begin{cases} D_1(p, \lambda) = -\frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} \cdot \frac{e^{q(p, \lambda) \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)}{\Delta(p, \lambda)}; \\ D_2(p, \lambda) = \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-q(p, \lambda) \cdot d} \cdot \left(1 - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)}{\Delta(p, \lambda)}. \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{где } \Delta(p, \lambda) = \left(1 + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2\right) \cdot \text{sh}(q(p, \lambda)d) + 2 \cdot \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \cdot \text{ch}(q(p, \lambda)d).$$

Функции  $D_{1,2}(p, \lambda)$  из соотношений (21) подставим в выражение (14). После тождественных преобразований получим, что

$$E_x(p, \lambda, z) = -\frac{K(p, \lambda)e^{-\lambda h}}{\lambda} \cdot \frac{\left(\text{sh}(q(p, \lambda)(z+d)) + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \text{ch}(q(p, \lambda)(z+d))\right)}{\Delta(p, \lambda)}. \quad (22)$$

Полученная зависимость представляет собой изображение по Лапласу для продольной компоненты напряжённости электрического поля, возбуждённого в листовом металле.

Выражение (22) помножим на удельную электропроводность листового металла  $\gamma$ . Результат подставим в формулу (8).

После всех необходимых подстановок найдём плотность индуцированного тока в лапласовом  $L$  – пространстве:

$$j_x(p, y, \zeta) = -\left(\frac{2a\tau}{\pi d^2}\right) \cdot (p \cdot j(p)) \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)} \cdot \frac{e^{-\lambda h}}{\lambda} \cdot \frac{F(p, \lambda, \zeta)}{\Delta(p, \lambda)} \cdot \cos(\lambda y) d\lambda, \quad (23)$$

где  $\tau = \mu_0 \gamma d^2$  – характерное время диффузии в листовом металле [8],

$$F(p, \lambda, \zeta) = \left(\text{sh}((q(p, \lambda)d) \cdot (1 - \zeta)) + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \text{ch}((q(p, \lambda)d) \cdot (1 - \zeta))\right),$$

$\zeta = \left(-\frac{z}{d}\right)$  – пространственная переменная, связанная с толщиной листового металла,  $\zeta \in [0, 1]$ .

В выражении (23) выполним переход в пространство оригиналов [6, 7].

Для вычисления особых точек подынтегральной функции приравняем к нулю знаменатель дроби выражения (23) и представим произведение продольного волнового числа на толщину листовой заготовки как мнимую величину:

$$\{\Delta(p, \lambda) = 0; (q(p, \lambda) \cdot d) = i \cdot \beta_k\}, \quad (24)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

С помощью системы (24) получаем трансцендентное уравнение для величин  $\beta_k$ :

$$\text{ctg} \beta_k = 0.5 \cdot \left(\frac{\beta_k}{(\lambda d)} - \frac{(\lambda d)}{\beta_k}\right). \quad (25)$$

Как следует из (24) и (25), особыми точками функции комплексного переменного под знаком интеграла в

выражении (23) являются простые, отличные от нуля полюса  $p_k$ , а именно:

$$p_k = -\frac{1}{\tau} \cdot (\beta_k^2 + (\lambda \cdot d)^2), \quad k = 0, \pm 1, 2, \dots \quad (26)$$

Далее, в соответствии с теоремами об оригинале рациональной дроби и из обращения свёртки функций находим из выражения (23) соответствующую временную зависимость:

$$\begin{aligned} & \frac{p \cdot j(p) \cdot \left( sh((q(p, \lambda) \cdot d)(1 - \zeta)) + \left( \frac{(q(p, \lambda) \cdot d)}{(\lambda d)} \right) \cdot ch((q(p, \lambda) \cdot d)(1 - \zeta)) \right)}{\Delta(p, \lambda)} \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot \left. \frac{i \cdot \left( \sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left( \frac{\beta_k}{(\lambda d)} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right)}{\frac{d}{dp} [\Delta(p, \lambda)]} \right|_{p=p_k} \cdot \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k \cdot t}, \quad (27) \end{aligned}$$

где  $\zeta = -\frac{z}{d}$ ,  $\zeta \in [0, 1]$  – координата, связанная с толщиной листового металла, в относительных единицах;

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 2, & k \neq 0. \end{cases}$$

*Примечание.*

Наличие множителя  $\delta_k$  обусловлено чётностью корней  $\beta_k$  в уравнении (25).

В конечном итоге, с использованием зависимости (27) после необходимых тождественных преобразований находим оригинал для плотности тока, возбуждаемого в листовом металле.

$$j_x(t, \zeta, y) = I_m \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)} e^{-\lambda h} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{F(\beta_k, \lambda, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \lambda)} \left( \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k \cdot t} \right) \lambda \cos(\lambda y) d\lambda, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} F(\beta_k, \lambda, \zeta) &= \beta_k \cdot \left[ \sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left( \frac{\beta_k}{(\lambda \cdot d)} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right]; \\ \Phi(\beta_k, \lambda) &= \cos(\beta_k) \cdot [(\lambda d)^2 + 2(\lambda d) - \beta_k^2] + 2\beta_k \sin(\beta_k) \cdot [(\lambda d) + 1]. \end{aligned}$$

Выражение (28) приведём к виду, удобному для вычислений. Для этого введём новую переменную интегрирования  $\alpha = \lambda d$ ,  $\alpha \in [0, \infty)$ ,  $d\lambda = \frac{1}{d} \cdot d\alpha$ , и составим следующее соотношение:

$$j_x(t, \zeta, y) = I_m \left( \frac{2}{\pi d^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \cdot e^{-\alpha \frac{h}{d}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{F(\beta_k, \alpha, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left( \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k \cdot t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} F(\beta_k, \alpha, \zeta) &= \beta_k \cdot \left[ \sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left( \frac{\beta_k}{\alpha} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right]; \\ \Phi(\beta_k, \alpha) &= \cos(\beta_k) \cdot [\alpha^2 + 2\alpha - \beta_k^2] + 2\beta_k \sin(\beta_k) \cdot [\alpha + 1], \end{aligned}$$

вещественные числа  $\beta_k$  удовлетворяют трансцендентному уравнению:  $ctg \beta_k = 0.5 \cdot \left( \frac{\beta_k}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta_k} \right)$ .

Зависимость (29) проинтегрируем по толщине листового металла. Получим формулу для вычисления линейной плотности, описывающей поперечное распределение индуцированного тока:

$$J_x(t, y) = I_m \left( \frac{2}{\pi d} \right) \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left( \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k \cdot t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha, \quad (30)$$

где  $G(\beta_k, \alpha) = \left[ (1 - \cos \beta_k) + \left( \frac{\beta_k}{\alpha} \right) \cdot \sin \beta_k \right]$ .

Интеграл зависимости (30) по поперечной переменной даёт выражение для величины тока, индуцированно-

го в металле листовой заготовки в области  $y \in [-a, a]$ :

$$I_x(t) = I_m \left( \frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \left( \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \right)^2 e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^\infty \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left( \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha d\alpha. \quad (31)$$

Пусть внешний ток от стороннего источника подаётся в листовой металл так, что его распределение по поперечному сечению области под основным токопроводом также является равномерным.

Как результат суперпозиции стороннего и индуцированного сигналов, найдём зависимости для результирующего тока и его плотности в указанной ограниченной зоне листового металла.

Суммарный ток запишется так:

$$I_x^{(S)}(t) = I_m \left[ j_t(t) - \left( \frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \left( \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \right)^2 e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^\infty \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left( \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha d\alpha \right]. \quad (32)$$

Результирующая плотность тока, протекающего в данной части листового металла, с учётом выражения (29) запишется в таком виде:

$$j_x^{(S)}(t, \zeta, y) = \frac{I_m}{(2ad)} \left[ j_t(t) - \left( \frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \cdot e^{-\alpha \frac{h}{d}} \cdot \sum_{k=0}^\infty \delta_k \frac{F(\beta_k, \alpha, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left( \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha \right]. \quad (33)$$

Формула (33) позволяет рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, где имеет место суперпозиция индуцированного и стороннего тока.

Иллюстративной характеристикой протекающих электромагнитных процессов является линейная плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом. Она описывает поперечное распределение тока и, в конечном итоге, иллюстрирует степень однородности возбуждаемых сил притяжения по координате  $y \in [-a, a]$ .

Интегрируя выражение (33) по  $\zeta \in [0, 1]$  с учётом связи  $\zeta = -\frac{z}{d}$ ,  $z \in [-d, 0]$ , получаем, что

$$J_x^{(S)}(t, y) = \frac{I_m}{(2ad)} \left[ j_t(t) - \left( \frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^\infty \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left( \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \cdot \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha \right]. \quad (34)$$

Анализируя электромагнитные процессы в рассматриваемой системе при параллельном электрическом подключении основного токопровода длиной  $l$  к участку той же длины на листовом металле, можно отметить следующие обстоятельства.

В постановке задачи указывалось, что основной токопровод прозрачен для действующих полей и не влияет на протекающие электромагнитные процессы. Но, положим, что он выполнен из того же металла, что и листовая заготовка.

В первом приближении, влияние индукционных эффектов на токовые характеристики в источнике возбуждения системы – в основном токопроводе – можно учесть, если, исходя из физических принципов подобия, принять, что электромагнитные процессы в нём и в зоне листового металла под ним идентичны.

С учётом вышеуказанных обстоятельств суммарные величины токовых характеристик в основном токопроводе можно представить зависимостями (32) – (34).

Суммарная сила притяжения, возбуждаемая при взаимодействии параллельных токов, описываемых выражением (32), принимает вид [9]:

$$F_{attr}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left( I_x^{(S)}(t) \right)^2 \cdot \frac{\ell}{h}. \quad (35)$$

**Перспективы дальнейших исследований.** Выражение (35) в совокупности с зависимостью (32), а также соотношения (33) и (34) для линейной плотности возбуждаемых токов представляют собой решения поставленной электродинамической задачи. Они адекватно описывают процессы в инструменте магнитно-импульсного притяжения при прямом пропускании тока через обрабатываемый металл и могут быть использованы при проектировании реальных конструкций инструментов.

**Выводы.** В данной работе с помощью математического аппарата теории электромагнитных полей показано, что полученные аналитические выражения позволяют рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, где имеет место суперпозиция индуцированного и стороннего тока, а также линейную плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом и интегральную силу притяжения, возбуждаемую при взаимодействии параллельных токов.

В первом приближении влияние индукционных эффектов на токовые характеристики в источнике возбуждения системы (то есть в основном токопроводе) можно учесть, если, исходя из физических принципов подобия, предположить, что электромагнитные процессы в нём и в зоне листового металла под ним идентичны [9].

Следует также заметить, что выражения для суммарной силы притяжения в совокупности с зависимостями для результирующего тока и линейной плотности возбуждаемых токов представляют собой решения поставленной электродинамической задачи, что позволяет рассматривать процессы в реальных инструментах магнитно-импульсного притяжения при «прямом пропускании тока» через обрабатываемый металл.

#### Список литературы

1. Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V. Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – Fundamentals and perspective applications // *Journal of Materials Processing Technology*. – Elsevier. – 2013. – № 213 (3). – pp. 444 – 452.
2. Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals // *Journal of Materials Processing Technology*. – Elsevier. – 2014. – № 214 (2). – pp. 390 – 401.
3. Welcome to BETAG Innovation // Материалы сайта. – 2013. – Режим доступа : <http://www.betaginnovation.com> ([www.beulentechnik.com](http://www.beulentechnik.com)) – Дата обращения : 10 марта 2019.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М. : «Наука», 1973. – 831с.
5. Батыгин Ю. В., Лавинский В. И., Хименко Л. Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Том 1. Издание второе, переработанное и дополненное под общей редакцией д.т.н., профессора Батыгина Ю. В. – Харьков : МОСТ – Торнадо, 2003. – 288с.
6. Шнейерсон Г. А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сильных токов. – М. : Энергоиздат, 1992. – 413с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М. : Наука, 1982. – 620с.
8. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики // Пер. с англ. Крайнова В. П. – М. : Атомиздат, 1972. – 399с.
9. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

#### References (transliterated)

1. Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V. Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – Fundamentals and perspective applications. *Journal of Materials Processing Technology*. Elsevier, 2013, no. 213 (3), pp. 444–452.
2. Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*. Elsevier, 2014, no. 214 (2), pp. 390–401.
3. Welcome to BETAG Innovation. *Materialy sayta* [Site materials]. 2013. Available at : <http://www.betaginnovation.com> [www.beulentechnik.com](http://www.beulentechnik.com) (accessed 10.03.2019).
4. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike* [Handbook of Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 831 p.
5. Batygin Yu. V., Lavinsky V. I., Khimenko L. T. *Impul'snyye magnitnyye polya dlya progressivnykh tekhnologiy. Tom 1. Izdaniye vtoroye, pererabotannoye i dopolnennoye pod obshchey redaktsiyey d.t.n., professora Batygina Yu. V.* [Pulsed magnetic fields for advanced technologies. Volume 1. Second edition, revised and supplemented under the general editorship of Doctor of Technical Sciences, Professor Yu.B. Batygin]. Kharkov, MOST – Tornado Publ., 2003. 288 p.
6. Shneyerson G. A. *Polya i perekhodnyye protsessy v apparature sil'nykh tokov* [Fields and transients in the equipment of strong currents. 2nd edition, revised and enlarged]. Moscow, Energoizdat Publ., 1992. 413p.
7. Landau L. D., Lifshits Ye. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 620 p.
8. Met'yuz Dzh., Uoker R. *Matematicheskiye metody fiziki. Per. s angl. Krainova V. P.* [Mathematical methods of physics. Trans. from English by Krainov V.P.]. Moscow, Atomizdat Publ., 1972. 399 p.
9. Yavorskiy B. M., Detlaf A. A. *Spravochnik po fizike* [Handbook of Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 624 p.

Поступила (received) 12.03.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Батигін Юрій Вікторович (Батыгин Юрий Викторович, Batygin Yuriy Viktorovich)** – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: [I.yu.v.batygin@gmail.com](mailto:I.yu.v.batygin@gmail.com).

**Єрьоміна Олена Федорівна (Ерёмина Елена Фёдоровна, Yeryomina Olena Fedorivna)** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 248-52-75; e-mail: [elena.yeryomina@gmail.com](mailto:elena.yeryomina@gmail.com).

**Чапльгін Євген Олександрович (Чаплыгин Евгений Александрович, Chaplygin Evgen Olexandrovich)** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: [chaplygin.e.a.@gmail.com](mailto:chaplygin.e.a.@gmail.com).

**Стрельнікова Вікторія Анатоліївна (Стрельникова Виктория Анатольевна, Strelnikova Viktoria Anatoliyivna)** – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 072-22-85; e-mail: [v.strelnikova91@gmail.com](mailto:v.strelnikova91@gmail.com).



УДК 512.83, 539.1, 621.01

**А. П. КОЖУШКО, О. О. НАБОКА, О. Л. ГРИГОР'ЄВ****СПЕКТРАЛЬНІ ЕФЕКТИ ТА ТЕОРЕМИ ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПУЧКА СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ СКЛАДНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

Показано, що динамічний аналіз транспортного засобу із причепом чи напівприцепом приводить до задачі на власні значення для однопараметричного пучка  $A + kB$ ,  $k \in \mathbb{R}$  симетричних матриць. Вивчається поведінка спектральних траєкторій  $\lambda_j(k)$  і зміни власних форм  $\bar{X}_j(k)$  цього пучка. За додаткового припущення невід'ємності матриці  $B$  доведено, що функції  $\lambda_j(k)$  є монотонними за аргументом  $k$ . Сформульовано та доведено нетривіальне твердження о знаках мінорів діагональних елементів виродженої симетричної матриці  $C$ , а саме: усі мінори мають однаковий знак. Звідки витікає умова чергування знаків мінору  $C_{ll}(\lambda_0)$  діагонального елементу  $c_{ll}$  матриці  $C = A - \lambda_0 E$ , де  $\lambda_0$  послідовно приймає власні значення  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  матриці  $A$ . Крім цього, доведено, що у загальному випадку спектральні траєкторії не мають спільних точок. Введено поняття наближено кратного спектру, тобто таких значень  $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$ , для яких відстань між траєкторіями  $\lambda_{j,1}(k)$  і  $\lambda_{j,2}(k)$  є мінімальною за значеннями параметра  $k$ . Показано на прикладах, що в околі параметра  $k_0$  відбувається спільне обертання власних форм  $\bar{X}_{j,1}(k)$  і  $\bar{X}_{j,2}(k)$ , яке приводить до обміну їх координат. Тому при динамічному аналізі зв'язаних коливань, насамперед, необхідно вивчати поведінку системи при усіх значеннях параметра  $k_0$ , які відповідають наближено кратному спектру.

**Ключові слова:** динамічний аналіз, пучок симетричних матриць, спектральні траєкторії, власні форми коливань, монотонність спектру, кратний спектр, мінор матриці.

**А. П. КОЖУШКО, Е. А. НАБОКА, А. Л. ГРИГОРЬЕВ****СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ И ТЕОРЕМЫ О СВОЙСТВАХ ПУЧКА СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Показано, что динамический анализ транспортного средства с прицепом или полуприцепом приводит к задаче на собственные значения для однопараметрического пучка  $A + kB$ ,  $k \in \mathbb{R}$  симметричных матриц. Изучается поведение спектральных траекторий  $\lambda_j(k)$  и изменения собственных форм  $\bar{X}_j(k)$  этого пучка. В дополнительном предположении о неотрицательности матрицы  $B$  доказано, что функции  $\lambda_j(k)$  являются монотонными по аргументу  $k$ . Сформулировано и доказано нетривиальное утверждение о знаках миноров диагональных элементов вырожденной симметричной матрицы  $C$ , а именно: все миноры имеют одинаковый знак. Отсюда вытекает условие чередования знаков миноров  $C_{ll}(\lambda_0)$  диагонального элемента  $c_{ll}$  матрицы  $C = A - \lambda_0 E$ , где  $\lambda_0$  последовательно принимает собственные значения  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  матрицы  $A$ . Кроме того, доказано, что в общем случае спектральные траектории не имеют общих точек. Введено понятие приближенно кратного спектра, то есть таких значений  $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$ , для которых расстояние между траекториями  $\lambda_{j,1}(k)$  и  $\lambda_{j,2}(k)$  является минимально по значениям параметра  $k$ . Показано на примерах, что в окрестности параметра  $k_0$  происходит совместное вращение собственных форм  $\bar{X}_{j,1}(k)$  и  $\bar{X}_{j,2}(k)$ , которое приводит к обмену их координат. Поэтому при динамическом анализе связанных колебаний, прежде всего, необходимо изучать поведение системы при всех значениях параметра  $k_0$ , которые отвечают приближенно кратному спектру.

**Ключевые слова:** динамический анализ, пучок симметричных матриц, спектральные траектории, собственные формы колебаний, монотонность спектра, кратный спектр, минор матрицы.

**A. P. KOZHUSHKO, O. O. NABOKA, O. L. GRIGORIEV****SPECTRAL EFFECTS AND THEOREMS ON SYMMETRIC MATRIX BUNDLE SPECTRUM PROPERTIES IN COMPOSITE MECHANICAL SYSTEM DYNAMICAL PROBLEMS**

Dynamic analysis of vehicles with trailer or semitrailer evokes the problem on the eigenvalues of one-parameter bundle of symmetric matrices  $A + kB$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . The behavior of spectral trajectories  $\lambda_j(k)$  and changes in eigenforms  $\bar{X}_j(k)$  of the bundle are studied. Under the additional assumption that the matrix  $B$  is non-negative the functions  $\lambda_j(k)$  are proved to be monotone in  $k$ . A non-trivial statement about the sign of the minors of diagonal elements of degenerate symmetric matrix  $C$  is formulated and proved, namely, it is shown that all the minors are of the same sign. This fact implies sign alternation for the minors  $C_{ll}(\lambda_0)$  of the diagonal elements  $c_{ll}$  of the matrix  $C = A - \lambda_0 E$ , where  $\lambda_0$  takes on sequentially the eigenvalues  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  of the matrix  $A$ . Moreover, it is proved that in general case the spectral trajectories do not intersect. The notion of approximately multiple spectrum is introduced, which means the values  $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$  such that the distance between the trajectories  $\lambda_{j,1}(k)$  and  $\lambda_{j,2}(k)$  is minimal in  $k$ . The examples given testify that in the vicinity of  $k_0$  the eigenforms  $\bar{X}_{j,1}(k)$  and  $\bar{X}_{j,2}(k)$  mutually rotate, which results into exchange of their coordinates. Hence, when studying the dynamics of connected vibrations the behavior of the system needs to be considered foremost for all the values of the parameter  $k_0$  corresponding to the approximately multiple spectrum.

**Key words:** dynamic analysis, symmetric matrix bundle, spectral trajectories, eigenforms of vibrations, monotone spectrum, multiple spectrum, matrix minor.

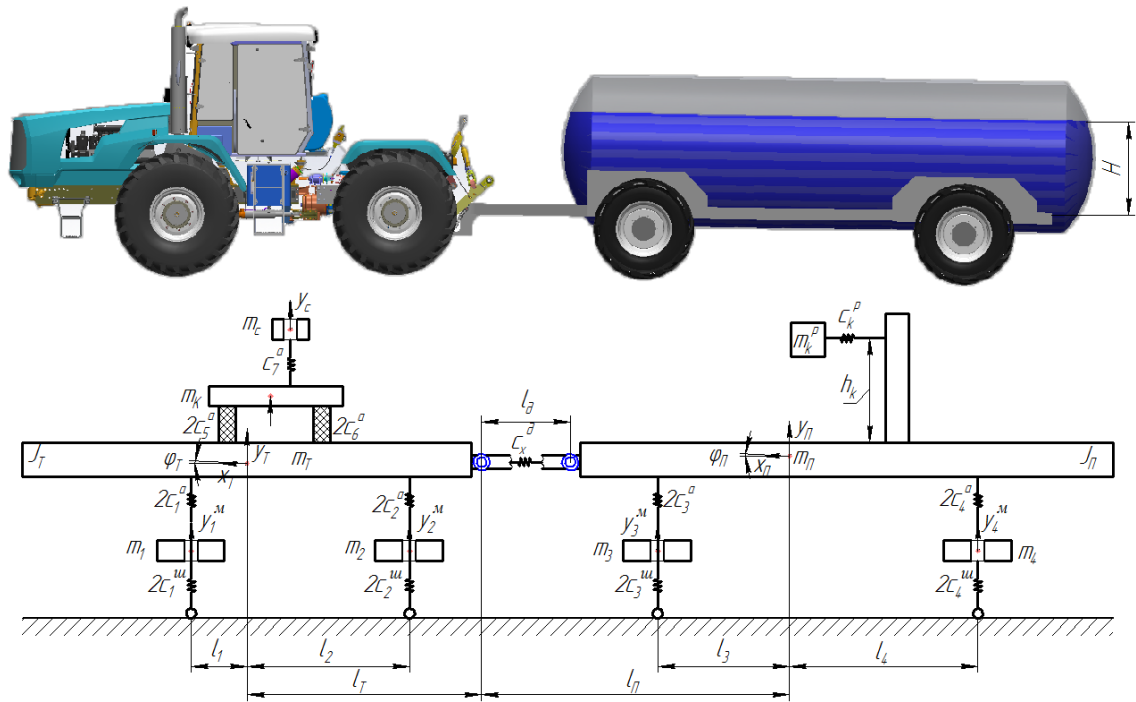


Рис. 1 – Розрахункова схема транспортного засобу з причепом (деякі рухи та зв'язки не зображено).

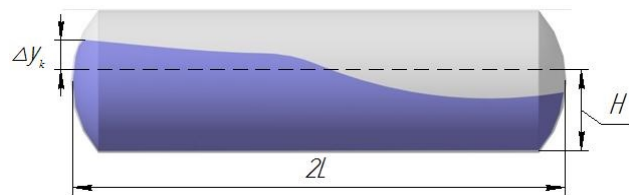


Рис. 2 – Підняття вільної поверхні рідини у цистерні при розгоні або гальмуванні машинно-тракторного агрегату.

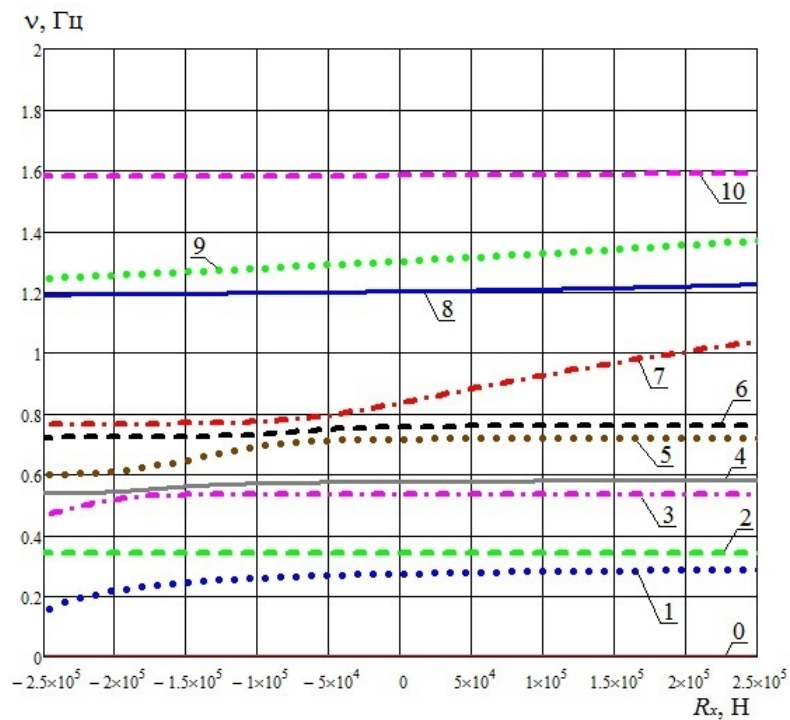


Рис. 3 – Залежність власних частот від поздовжньої сили  $R_x$  для засобу з причепом (цифри позначають номер спектральної тракторії).

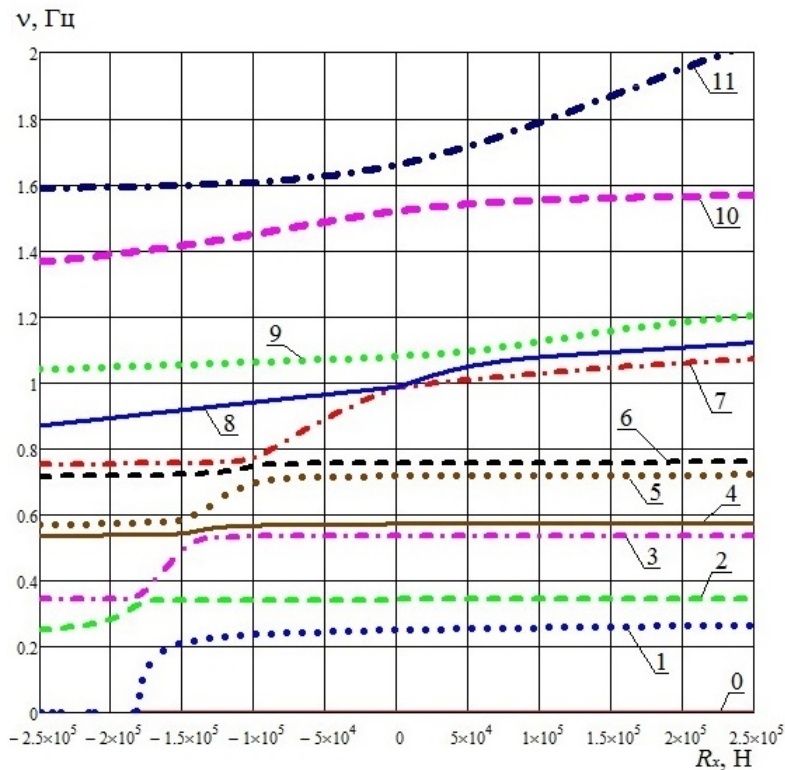


Рис. 4 – Залежність власних частот від поздовжньої сили  $R_x$  для засобу з напівприцепом (цифри позначають номер спектральної траєкторії).

**Вступ та постановка задачі.** До складних механічних систем відносять сукупність об'єктів, однакових чи різних за своїми властивостями, приєднаних один до одного за допомогою деяких механічних зв'язків. При вивченні таких систем важливо враховувати взаємодію їх компонентів, бо вона може призвести до таких специфічних явищ, притаманних лише пов'язаній динаміці, як, наприклад, галопуючий резонанс [1], чи синхронізація [2].

У роботі [1] із застосуванням дискретної математичної моделі досліджувалися спектри та власні форми вільних коливань трактора з причепом, який перевозить рідину у цистерні (рис. 1). Коливання рідини (рис. 2) було враховано на основі розробленого у роботі [3] метода, який моделював низькочастотні поверхневі хвилі Релея за допомогою рівнянь для потенціалів відповідних векторних та скалярних полів.

В результаті було складено квазілінійну систему диференціальних рівнянь наступного вигляду:

$$d^2 \vec{X} / dt^2 + (A + kB) \cdot \vec{X} = \vec{0}, \quad (1)$$

де вектор  $\vec{X}$  містить  $n = 19$  координат; параметр  $k \in \mathbb{R}$  є пропорційним силі  $R_x$ , що діє вздовж причіпного пристрою; матриці  $A[n \times n] \geq 0$ ;  $B[n \times n] \geq 0$  є симетричними, причому  $rgA \leq n - 1$ ;  $rgB \ll rgA$ .

Блоковий вигляд матриць  $A$  і  $B$  надано у [1]. З (1) отримаємо алгебраїчне рівняння для резонансних кругових частот  $\omega$ :

$$\det(A + kB - \omega^2 E) = 0, \quad (2)$$

де  $E[n \times n]$  – одинична матриця.

Таким чином, резонансні значення  $\omega^2$  належать до спектру матриці  $A + kB$ . Як відомо, симетрична матриця  $n$ -го порядку має дійсний спектр  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , причому, як це витікає з умови поставленої задачі, вона є виродженою, і принаймні одне власне число дорівнює 0. Що забезпечує стійку рівновагу системи за умови зупинки транспортного засобу у довільному місці прямого шляху. Числам  $\lambda_j > 0$  відповідають гармонійні коливання з кутовою частотою

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$$

та довільною амплітудою і фазою. Числа  $\lambda_j < 0$  виникають за умови суттєво від'ємного значення параметра  $k$ , тобто коли транспортний засіб котиться з достатньо крутої гори, і причіп тисне на трактор. При цьому у русі зчіпного пристрою виникає нестійкість та спостерігається загрозливе для усього транспортного засобу явище, яке називають *галопуючим резонансом*. Щоб обмежити амплітуду коливань при цьому резонансі, у конструкції причепа використовуються міцні упори.

Розрахунок спектру матриці  $A + kB$  та її власних форм проводився у програмному середовищі MathCAD за допомогою стандартних процедур `eigenvals(.)` та `eigenvector(.,.)`. Результати цих розрахунків для низькочастот-

ної частини спектру, які було виконано для двох типів машино – тракторного агрегату (із причепом та із напівпричепом [1]), наведено на графіках рис. 3, 4 та у табл. 1, 2. На рисунках частоти  $\nu$  резонансних коливань надано у герцах; у таблицях їх наведено у першій строчці, а інші строчки нормовані у сенсі простору  $l_2$ .

Таблиця 1 – Компоненти перших нормованих власних форм коливань для причіп-цистерни

| Номер          | 0           | 1            | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7            | 8           | 9            | 10           |
|----------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|--------------|
| $\nu$          | <b>0</b>    | <b>0.27</b>  | <b>0.34</b> | <b>0.54</b> | <b>0.57</b> | <b>0.72</b> | <b>0.76</b> | <b>0.86</b>  | <b>1.21</b> | <b>1.32</b>  | <b>1.58</b>  |
| $y_T$          | 0           | 0.01         | 0.02        | -0.01       | 0           | 0.14        | 0.01        | 0.16         | <b>0.69</b> | <b>-0.43</b> | 0.09         |
| $y_1^u$        | 0           | 0.03         | 0           | 0.01        | -0.02       | -0.03       | -0.04       | -0.2         | 0           | -0.06        | -0.04        |
| $y_2^u$        | 0           | 0            | 0.01        | -0.01       | 0           | 0.06        | 0.01        | 0.07         | <b>0.29</b> | -0.18        | 0.04         |
| $y_K$          | 0           | 0            | 0.14        | -0.01       | 0           | <b>0.97</b> | -0.05       | -0.14        | -0.13       | 0.06         | -0.01        |
| $y_C$          | 0           | -0.01        | <b>0.99</b> | -0.02       | -0.01       | -0.15       | 0           | 0            | 0           | 0            | 0.02         |
| $\varphi_T$    | 0           | 0.09         | -0.01       | 0.03        | -0.07       | -0.12       | -0.12       | <b>-0.62</b> | -0.21       | -0.03        | <b>-0.13</b> |
| $\varphi_K$    | 0           | 0.01         | -0.03       | -0.06       | -0.04       | -0.02       | -0.03       | -0.16        | -0.09       | -0.02        | <b>0.98</b>  |
| $y_{II}$       | 0           | 0.02         | 0           | 0.01        | -0.02       | -0.02       | -0.06       | -0.42        | 0.58        | <b>0.57</b>  | -0.01        |
| $y_3^u$        | 0           | 0.01         | 0           | 0           | -0.01       | -0.01       | -0.02       | -0.1         | 0.14        | 0.14         | 0            |
| $y_4^u$        | 0           | 0.01         | 0           | 0           | -0.01       | -0.01       | -0.02       | -0.1         | 0.14        | 0.14         | 0            |
| $\varphi_{II}$ | 0           | -0.11        | 0           | -0.02       | 0.08        | 0.03        | 0.12        | <b>0.48</b>  | -0.04       | <b>0.64</b>  | 0.1          |
| $x_1^p$        | <b>0.54</b> | <b>-0.83</b> | -0.01       | 0.05        | -0.01       | -0.01       | -0.03       | -0.1         | 0           | -0.05        | -0.01        |
| $x_2^p$        | 0.14        | 0.08         | 0           | <b>-0.3</b> | <b>0.93</b> | -0.01       | -0.02       | -0.1         | 0           | -0.04        | 0            |
| $x_3^p$        | 0.06        | 0.03         | 0           | -0.03       | -0.02       | 0.03        | <b>0.98</b> | -0.19        | 0           | -0.03        | 0            |
| $x_{II}$       | <b>0.57</b> | <b>0.35</b>  | 0           | -0.13       | -0.14       | 0           | -0.04       | 0.08         | 0           | 0.05         | -0.01        |
| $x_T$          | <b>0.53</b> | <b>0.34</b>  | 0           | -0.12       | -0.14       | 0           | -0.04       | 0.05         | 0           | 0.01         | -0.01        |
| $x_K$          | 0.17        | 0.16         | 0.02        | <b>0.93</b> | <b>0.26</b> | 0.01        | 0.02        | 0.02         | 0           | 0            | 0.07         |
| $x_T^u$        | 0.21        | 0.13         | 0           | -0.05       | -0.05       | 0           | -0.02       | 0.02         | 0           | 0            | 0            |
| $x_{II}^u$     | 0.1         | 0.06         | 0           | -0.02       | -0.02       | 0           | -0.01       | 0.02         | 0           | 0.02         | 0            |

Таблиця 2 – Компоненти нормованих власних форм коливань для напівпричіп-цистерни

| Номер          | 0           | 1            | 2            | 3            | 4           | 5           | 6           | 7            | 8           | 9            | 10          | 11           |
|----------------|-------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|
| $\nu$          | <b>0</b>    | <b>0.27</b>  | <b>0.34</b>  | <b>0.54</b>  | <b>0.58</b> | <b>0.72</b> | <b>0.76</b> | <b>1.02</b>  | <b>1.02</b> | <b>1.35</b>  | <b>1.53</b> | <b>1.69</b>  |
| $y_T$          | 0           | 0            | -0.02        | -0.01        | 0           | 0.14        | 0           | <b>-0.42</b> | 0.28        | -0.06        | <b>0.56</b> | <b>-0.5</b>  |
| $y_1^u$        | 0           | 0            | 0            | 0.01         | 0           | -0.02       | 0           | 0.18         | -0.11       | -0.01        | 0.14        | -0.28        |
| $y_2^u$        | 0           | 0            | -0.01        | -0.01        | 0           | 0.06        | 0           | -0.18        | 0.12        | -0.03        | <b>0.23</b> | -0.2         |
| $y_K$          | 0           | 0            | -0.14        | -0.01        | 0           | <b>0.97</b> | 0           | 0.15         | -0.1        | 0.01         | -0.06       | 0.04         |
| $y_C$          | 0           | 0            | <b>-0.99</b> | -0.02        | 0           | -0.15       | 0           | 0            | 0           | 0            | 0.02        | 0.01         |
| $\varphi_T$    | 0           | 0            | 0.02         | 0.03         | 0.01        | -0.1        | 0           | <b>0.63</b>  | <b>-0.4</b> | -0.01        | 0.18        | <b>-0.52</b> |
| $\varphi_K$    | 0           | 0            | 0.03         | -0.07        | -0.02       | -0.02       | 0           | 0.2          | -0.13       | -0.01        | <b>0.76</b> | <b>0.6</b>   |
| $y_{II}$       | 0           | -0.03        | 0            | 0            | 0.03        | 0           | 0.03        | <b>0.47</b>  | 0.7         | <b>-0.43</b> | -0.03       | 0.02         |
| $y_3^u$        | 0           | -0.01        | 0            | 0            | 0.01        | 0           | 0.01        | 0.12         | 0.17        | -0.1         | -0.01       | 0.01         |
| $y_4^u$        | 0           | -0.01        | 0            | 0            | 0.01        | 0           | 0.01        | 0.11         | 0.17        | -0.11        | -0.01       | 0.01         |
| $\varphi_{II}$ | 0           | -0.11        | 0            | 0            | 0.08        | 0           | 0.07        | 0.22         | <b>0.38</b> | <b>0.88</b>  | 0.04        | -0.03        |
| $x_1^p$        | <b>0.54</b> | <b>-0.83</b> | 0            | 0.04         | -0.01       | 0           | -0.01       | -0.03        | -0.06       | -0.07        | 0           | 0            |
| $x_2^p$        | 0.14        | 0.08         | 0            | <b>-0.26</b> | <b>0.95</b> | 0           | -0.01       | -0.03        | -0.05       | -0.05        | 0           | 0            |
| $x_3^p$        | 0.06        | 0.03         | 0            | -0.03        | -0.02       | 0           | <b>0.99</b> | -0.03        | -0.05       | -0.04        | 0           | 0            |
| $x_{II}$       | <b>0.57</b> | <b>0.36</b>  | 0            | -0.13        | -0.14       | 0           | -0.05       | 0.03         | 0.05        | 0.07         | -0.01       | -0.01        |
| $x_T$          | <b>0.53</b> | <b>0.34</b>  | 0            | -0.12        | -0.13       | 0           | -0.05       | 0.01         | 0.02        | 0.01         | -0.01       | -0.01        |
| $x_K$          | 0.17        | 0.15         | -0.02        | <b>0.94</b>  | 0.22        | 0.01        | 0.02        | -0.01        | 0           | 0            | 0.05        | 0.05         |
| $x_T^u$        | 0.21        | 0.13         | 0            | -0.05        | -0.05       | 0           | -0.02       | 0.01         | 0.01        | 0            | 0           | 0            |
| $x_{II}^u$     | 0.1         | 0.06         | 0            | -0.02        | -0.02       | 0           | -0.01       | 0.01         | 0.01        | 0.02         | 0           | 0            |

У статті [1] для динамічних параметрів використано наступні позначення:  $y_T, y_P, y_K, y_C, y_{1,\dots,4}^M$  – це вертикальні зміщення центрів ваги трактора, кабіни, сидіння, причепа та мостів;  $\varphi_T, \varphi_P, \varphi_K$  – кути повороту трактора, причепа та кабіни;  $x_T, x_P, x_K, x_{1,\dots,3}^P$  – горизонтальні зміщення центрів мас трактора, причепа, кабіни та трьох шарів рідини поблизу її вільної поверхні;  $x_T^H, x_P^H$  – горизонтальні зміщення точок контакту дороги із шинами трактора або причепа. У стовбцях табл. 1, 2 вказані відносні амплітуди вільних гармонійних коливань із зазначеною частотою; причому якщо амплітуда є від’ємною, то відповідний параметр коливається у протифазі до руху, який є визначальним для цієї форми.

Зауважимо, що при русі транспортного засобу значення  $R_x$  постійно та неперервно змінюється, а чинники, які збуджують коливання внаслідок нерівностей шляху, через зміни у швидкості руху можуть мати довільну частоту. І тому усі точки, які наведено на рис. 3, 4, можуть призвести до резонансних явищ. У механіці такий резонанс називають *зовнішнім*. Крім нього вивчають й так звані *внутрішні резонанси*, коли співпадають дві або більше власних частот. Уважне вивчення графіків показало, що на них такі резонанси не спостерігаються.

Замість цього спостерігаємо явище, яке можна трактувати як *відштовхування частот* одне від одного в разі їх наближення. Зауважимо, що один із авторів цієї статті спостерігав аналогічне відштовхування, коли у [4] вивчав вплив крайових умов на спектр власних коливань циліндричної пружини. Проте та задача була складніша і розв’язувалася за допомогою теорії лінійних диференціальних операторів, які описували пружний континуум. В нашому випадку йдеться про задачу лінійної алгебри, і зазначена властивість формулюється у вигляді наступної теореми.

**Теорема 1 (про збереження простого спектру).**

*Припустимо, що матриці  $A[n \times n]$ ,  $B[n \times n]$  не мають спільних власних векторів, а спектр матриці  $A$  простий. Тоді спектральні траєкторії  $\lambda_j(k)$ ,  $j = 1, \dots, n$  матричного пучка  $A + kB$ ,  $k \in \mathbb{R}$  перетинаються тільки у випадку спеціального вибору елементів  $a_{ij}, b_{ij}$  матриць  $A$  і  $B$ .*

Оскільки у відомій літературі [5 – 10], де викладається теорія матриць, такого твердження немає, ми були вимушені у тексті цієї статті надати своє доведення цього нетривіального результату. На рис. 4 можна спостерігати каскад потенційних зіткнень спектральних траєкторій, які, у наслідок дії теореми 1, так і не відбулися.

Зауважимо, що коли у системі диференціальних рівнянь спостерігається зовнішній та внутрішній резонанс одночасно, то амплітуда коливань зростає додатково. Тут співпадіння трьох частот немає, проте на окремих ділянках спектральні траєкторії суттєво наближуються, і це все рівно призводить до додаткового зростання коливань.

Щоб систематизувати дослідження цього явища, ми ввели наступні визначення. Будемо пару чисел  $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$  називати *наближено кратним спектром*, якщо відстань між траєкторіями  $\lambda_{j,1}(k)$  і  $\lambda_{j,2}(k)$  є мінімальною за значеннями параметра  $k$ . При цьому значення параметра  $k_0$  називатимемо *резонансним*, а власні форми  $\bar{X}_{j,1}(k), \bar{X}_{j,2}(k)$  назвемо *резонуючою парою*.

Наступна теорема, яка не потребує формального доведення, фіксує особливість зміни власних форм у цьому випадку.

**Теорема 2 (про спільне обертання резонуючої пари власних форм).**

*В околі резонансного значення  $k_0$  резонуюча пара власних ортонормованих форм  $\bar{X}_{j,1}(k), \bar{X}_{j,2}(k)$  спільно обертається у багатовимірному просторі та при значеннях  $k = k_0 - \Delta k$  і  $k = k_0 + \Delta k$ , де значення  $\Delta k$  є малим числом, ці форми фактично обмінюються координатами, тобто*

$$\bar{X}_{j,1}(k_0 - \Delta k) \approx \pm \bar{X}_{j,2}(k_0 + \Delta k), \quad \bar{X}_{j,2}(k_0 - \Delta k) \approx \pm \bar{X}_{j,1}(k_0 + \Delta k),$$

*де вибір знаку в правих частинах не є принциповим і залежить від налаштування програми пошуку власних векторів матриці.*

Для матриць, які вивчалися у [1], більшість власних векторів були наближені до однокомпонентної форми (яка, як відомо, відповідає діагональній матриці). В результаті чого вимушені коливання, які збуджувалися по деякій координаті, залишалися локалізованими і суттєвого зв’язку між різними рухами вузлів транспортного засобу не спостерігалось. Проте, ця закономірність порушувалася в околі резонансного значення  $k_0$ , де власні форми мали найбільшу кількість координат, значення яких суттєво відрізнялися від нуля (табл. 1, 2). Тому при динамічному аналізі зв’язаних коливань, насамперед, необхідно вивчати поведінку системи при всіх резонансних значеннях параметра  $k$ .

До сказаного необхідно додати наступне. Якщо у задачі, що розглядається, крім зусилля  $R_x$  змінювати й рівень  $H$  рідини у цистерні, то задача на власні значення зводиться до пошуку спектра двопараметричного пучка вигляду

$$A(H) + kB, \quad k \in \mathbb{R}, H \in [0, D_u],$$

де  $D_y$  – це діаметр цистерни.

Формули, які описують нелінійні залежності елементів матриці  $A$  від рівня  $H$ , а також графіки відповідних спектральних траєкторій наведено у [1]. В цьому випадку при зміні параметра  $H$  спостерігаються перетини траєкторій, і точки наблизено кратного спектру перетворюються у точки кратного спектру. У цьому ж контексті діє тертя, яке згладжує резонанси та зближує результати розрахунку кратного та наблизено кратного спектрів.

Застосування розробленого в [1] методу динамічного аналізу виявило ще одну особливість поведінки власних частот. А саме, аналіз наведених графіків вказує на монотонну залежність спектру від значень параметра  $k$ . Якщо зважити на невід’ємність матриці  $B$ , така поведінка спектру не є дивною. Проте, оскільки в цитованій та іншій відомій літературі ми так і не знайшли обґрунтування цієї властивості, то були вимушені сформулювати та довести наступну теорему.

**Теорема 3 (про монотонність спектру).**

Нехай матриці  $A$  і  $B$ , що утворюють матричний пучок  $A + kB$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , є симетричними, причому матриця  $B$  є невід’ємною, а функції  $\lambda_j(k)$ ,  $j = 1, \dots, n$  описують спектральні траєкторії цього пучка. Тоді кожна функція  $\lambda_j(k)$  є монотонно зростаючою (або неспадною) за аргументом  $k \in \mathbb{R}$ .

Таким чином, задачею цієї публікації є доведення теорем 1 та 3.

**Доведення теореми 1 (про збереження простого спектру).** Матриця  $B$  у своєму власному базисі має діагональну структуру  $D$ , а матриця  $A$  приймає недіагональний симетричний вид  $\hat{A}$ . У подальшому доведенні ми не використовуватимемо тильду у позначенні цієї матриці.

Припустимо, що для деякого значення параметру  $k = k_0$  матриця  $A + k_0 D$  має кратне власне значення  $\lambda_0$ .

Тоді у матриці

$$C = A + k_0 D - \lambda_0 E, \quad (1)$$

ранг не перевищує числа  $n - 2$ .

Відмітимо, що матриця  $C$  відмінна від матриці  $A$  тільки у елементах головної діагоналі. Позначимо ці елементи  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , тобто

$$x_1 = c_{11}, x_2 = c_{22}, \dots, x_n = c_{nn}.$$

Для мінорів вказаних елементів використовуватимемо позначення

$$C_{11}, C_{22}, \dots, C_{nn}.$$

Зазначимо, що через ушербність рангу зазначені визначники дорівнюють нулю.

Отримаємо систему  $n$  рівнянь для  $n$  невідомих  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\{C_{11}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; C_{22}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, C_{nn}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (2)$$

Кожне із рівнянь системи (2) при довільному виборі недіагональних елементів є незалежним від інших. У просторі  $\mathbb{R}^n$  воно описує циліндричну поверхню, яка по сукупності змінних має  $n - 1$  порядок, та зменшує кількість вільних параметрів на 1 одиницю. Тобто, розв’язкам системи (2) відповідатиме скінченне число  $m \geq 0$  точок у просторі  $\mathbb{R}^n$ .

Так, для випадку  $n = 2$  для недіагональної матриці отримаємо значення  $m = 0$ , і ця задача розв’язків не має зовсім, а для випадку  $n = 3$  при ненульових недіагональних елементах  $a, b, c$  матриця  $C$  може приймати лише два значення:

$$C = \begin{bmatrix} (ac)/b & a & c \\ a & (ab)/c & b \\ c & b & (bc)/a \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad C = \begin{bmatrix} -(ac)/b & a & c \\ a & -(ab)/c & b \\ c & b & -(bc)/a \end{bmatrix},$$

тобто тут  $m = 2$ .

Отже, нам вдалося за елементами матриці  $A$ , що лежать поза її головною діагоналлю, знайти лише  $m$  матриць  $C$ , тобто матриці  $C_1, C_2, \dots, C_m$ . Відповідні до них діагональні матриці позначимо  $D_1, D_2, \dots, D_m$ ; причому зауважимо, що матриці  $D_j$  залежать від недіагональних елементів матриці  $A$ .

З (1) витікає, що діагональ  $D_A$  матриці  $A$  задовольняє умові:

$$D_A = D_j - k_0 D + \lambda_0 E, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

В правій частині (3) використовуються дві константи  $k_0, \lambda_0$ , значеннями яких можна розпоряджатися довільно. Отже, за умови  $n \geq 3$  рівняння (3) можна виконати лише за рахунок узгодженого вибору елементів матриць  $A$  і  $D$ , що і потрібно було довести.

У випадку  $n = 1$  наявна тільки одна спектральна траєкторія, а значить задача о перетині не є актуальною.

Випадок  $n = 2$  ми розглянемо окремо. Характеристичне рівняння матричного пучка тут має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kd_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} + kd_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки отримуємо квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + k(d_{11} + d_{22})) + [(a_{11} + kd_{11}) \cdot (a_{22} + kd_{22}) - a_{21}^2] = 0.$$

У випадку кратного спектру

$$\{(a_{11} + kd_{11}) + (a_{22} + kd_{22}) = 0, (a_{11} + kd_{11}) \cdot (a_{22} + kd_{22}) = a_{21}^2\}.$$

Позначимо  $y_1 = a_{11} + kd_{11}$ ,  $y_2 = a_{22} + kd_{22}$  та отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 0; \\ y_1 \cdot y_2 = a_{21}^2, \end{cases}$$

звідки  $y_1^2 = -a_{21}^2$ . Що можливо лише за умови  $a_{21} = 0$ , тобто коли матриця  $A$  є діагональною, а значить має спільну власну базу з матрицею  $B$ . *Отримане протиріччя завершує доведення теореми.*

*Зауваження.* Якщо матриця  $A$  є діагональною, то система (2) має нескінченну множину розв'язків:

$$x_j = 0, \text{ для } j \neq l, \quad x_l \in \mathbb{R}.$$

Цей випадок за умов теореми не вивчається.

Зазначене вище справедливо і для випадку кусково-діагональної матриці  $A$ , оскільки вона має спільні з матрицею  $B$  власні вектори, локалізовані всередині діагонального блоку.

**Доведення теореми 3 (про монотонність спектру).** Аналогічно доведенню теореми 1, у власному базисі матриці  $B$  пучок набуває вигляду:

$$A + kD, \quad (4)$$

де  $D$  – діагональна матриця,  $d_{jj} \geq 0$ .

Запишемо характеристичне рівняння пучка (4):

$$\det(A + kD - \lambda E) = 0. \quad (5)$$

Нехай рівняння (5) виконано для деяких  $k = k_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$ , тобто власне значення  $\lambda_0$  відповідає значенню параметра  $k_0$  і  $\det(A + k_0 D - \lambda_0 E) = 0$ . Підставимо в (5)  $k = k_0 + \Delta k$ ,  $\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$  і обчислимо визначник у лівій частині (5), лишаючи доданки першого порядку малості за  $\Delta k$  і  $\Delta \lambda$ . Як результат перетворень, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^n (\Delta k d_{jj} C_{jj} - \Delta \lambda C_{jj}) = 0, \quad (6)$$

де  $C_{jj}$  – мінори елемента  $c_{jj}$  матриці  $C = A + k_0 D - \lambda_0 E$ . Наслідком (6) є наступне рівняння:

$$\frac{\Delta \lambda}{\Delta k} = \frac{\sum_{j=1}^n d_{jj} C_{jj}(\lambda_0)}{\sum_{j=1}^n C_{jj}(\lambda_0)}. \quad (7)$$

Доведемо, що права частина (7) у точках спектру матриці  $C$ :  $\lambda_0 \in \sigma(C)$ , є додатною (принаймні, невід'ємною).

Нехай  $\lambda_0 = \min \sigma(C)$ . Тоді  $C \geq 0$ , і всі мінори цієї матриці є додатними. Зокрема,  $C_{jj}(\lambda_0) \geq 0$ , що доводить твердження.

Нехай  $\lambda_0 = \max \sigma(C)$ . Розглянемо матрицю

$$-C = \lambda_0 E - A - k_0 D.$$

Матриця  $-C \geq 0$  і всі її мінори є додатними. Усі мінори елементів матриці  $-C$  або співпадають із мінорами відповідних елементів матриці  $C$ , або відрізняються від них лише за знаком. Тому формула (7) зберігає свій вигляд для матриці  $-C$  і її права частина є додатною, що завершує доказ нашого твердження у цьому випадку.

Таким чином для випадку розмірності матриць  $n = 2$  ми довели *теорему 3*. Припустимо, розмірність матриць, що утворюють пучок,  $n \geq 3$ . Тоді існує власне значення  $\lambda_0$ :  $\min \sigma(C) \leq \lambda_0 \leq \max \sigma(C)$ , і матриця  $C$  є невизначеною у сенсі квадратичних форм. Доведення *теореми 3* у цьому випадку базується на наступній нетривіальній лемі.

**Лема (про знаки кутових мінорів).** Нехай матриця  $A$  є симетричною і число  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  належить її спектру  $\sigma(A)$ . Тоді матриця  $C = A - \lambda_0 E$  є виродженою і всі її мінори  $C_{jj}(\lambda_0)$  мають один знак (або дорівнюють нулю, але це окремий випадок, оскільки є характерним для діагональних матриць).

**Доведення леми для випадку  $n = 3$ .** У цьому випадку проведемо пряме доведення, яке не спирається на складні теореми інших авторів. Задля зручності запису, позначимо елементи матриці  $C = A - \lambda_0 E$  наступним чином:

$$C = \begin{pmatrix} x & a & c \\ a & y & b \\ c & b & z \end{pmatrix}.$$

Матриця  $C$  є виродженою, тобто

$$\det C = xyz - b^2x - c^2y - a^2z + 2abc = 0. \quad (8)$$

Обчислимо мінори матриці  $C$ :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} y & b \\ b & z \end{vmatrix} = yz - b^2, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} x & a \\ a & y \end{vmatrix} = xy - a^2.$$

Доведемо, що  $C_{11} \cdot C_{33} \geq 0$ , тобто

$$(xy - a^2)(yz - b^2) \geq 0. \quad (9)$$

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що

$$(xy - a^2)(yz - b^2) < 0. \quad (10)$$

Тоді, за неперервності, умова (10) виконуватиметься при  $x, z \neq 0$ , а рівність (8) можна зберегти за рахунок корегування  $c$ . Тому, не обмежуючи спільності міркувань, вважатимемо, що  $x, z \neq 0$ , і, задля визначеності,

$$\frac{a^2}{x} \leq \frac{b^2}{z}.$$

**а)** нехай  $x > 0, z > 0$ . Тоді значення  $y$ , що задовольняє (10), лежить у проміжку

$$\frac{a^2}{x} < y < \frac{b^2}{z}, \quad (11)$$

тобто

$$y = \frac{a^2}{x} \cdot \theta + \frac{b^2}{z} \cdot (1 - \theta), \text{ де } \theta \in (0; 1).$$

Підставляючи такий вираз для  $y$  в співвідношення (8) і спрощуючи отримане рівняння, находимо:

$$\begin{aligned} & (xz - c^2) \left( \frac{a^2}{x} \theta + \frac{b^2}{z} (1 - \theta) \right) - b^2x - a^2z + 2abc = \\ &= (xz - c^2) \left( \frac{a^2}{x} \theta + \frac{b^2}{z} (1 - \theta) \right) - b^2x [\theta + (1 - \theta)] - a^2z [\theta + (1 - \theta)] + 2abc [\theta + (1 - \theta)] = \\ &= \left\{ (xz - c^2) \frac{a^2}{x} - b^2x - a^2z + 2abc \right\} \cdot \theta + \left\{ (xz - c^2) \frac{b^2}{z} - b^2x - a^2z + 2abc \right\} \cdot (1 - \theta) = \\ &= -\frac{1}{x} \{ a^2c^2 - 2abcx + b^2x^2 \} \cdot \theta - \frac{1}{z} \{ b^2c^2 - 2abcz + a^2z^2 \} \cdot (1 - \theta) = -\frac{(ac - bx)^2}{x} \cdot \theta - \frac{(bc - az)^2}{z} \cdot (1 - \theta). \end{aligned}$$

Останній вираз дорівнює нулю, якщо  $\{ac - bx = 0, bc - az = 0\}$ , тобто  $\{x = ac/b, z = bc/a\}$ .

Але у цьому випадку

$$\frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{ac/b} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b^2}{z} = \frac{b^2}{bc/a} = \frac{ab}{c},$$

і, приймаючи до уваги (11), проміжок для  $y$  вироджується в одну точку, а ліва частина (10) дорівнює нулю.

Таким чином, випадок **а)** призводить до протиріччя.

**б)** випадок  $x < 0, z < 0$  зводиться до попереднього після переходу до матриці  $-C$ .

**в)** у випадку  $x < 0, z > 0$  маємо наступну нерівність для  $y$ :

$$[(-x)y + a^2] \cdot [yz - b^2] > 0, \text{ що можливо, якщо } y < \frac{a^2}{x} \text{ або } y > \frac{b^2}{z}.$$

Очевидно, що

$$\frac{a^2}{x} < 0 < \frac{b^2}{z} \text{ і } y = \frac{a^2}{x} \cdot \theta + \frac{b^2}{z} \cdot (1 - \theta), \text{ де } \theta \notin (0; 1).$$



Повторюючи викладки доведення пункту **а)**, отримуємо рівність:  $-\frac{(ac-bx)^2}{x} \cdot \theta - \frac{(bc-az)^2}{z} \cdot (1-\theta) = 0$ , звідки

$$\theta \cdot \left[ \frac{(cb-az)^2}{z} + \frac{(ca+(-x))^2}{(-x)} \right] = \frac{(cb-az)^2}{z}. \quad (12)$$

Із рівності (12) маємо умову  $\theta \in (0;1)$ , тобто і в цьому випадку ми прийшли до протиріччя.

**г)** випадок  $x > 0, z < 0$  зводиться до попереднього заміною матриці  $C$  на протилежну їй матрицю  $-C$ .

Таким чином, для випадку розмірності матриці  $n = 3$  лему доведено.

Відзначимо, що із леми впливає чергування знаку мінору  $C_{jj}(\lambda_k)$  на послідовних власних значеннях

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

**Доведення леми у загальному випадку.** Непряме доведення базується на **твердженні 231** про спектр *проектора* [9, стор. 189], яке є не менш нетривіальним, ніж сама лема. З твердження витікає, що власні значення матриці  $C = A - \lambda_0 E$  і її мінорів  $C_{jj}(\lambda_0)$  перемежуються для будь-якого  $j = 1, 2, \dots, n$ :

$$\lambda_1^C \geq \lambda_1^{C_{jj}} \geq \lambda_2^C \geq \lambda_2^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_{n-1}^{C_{jj}} \geq \lambda_n^C,$$

де  $\lambda_k^C, k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\lambda_k^{C_{jj}}, k = 1, 2, \dots, (n-1)$  – це власні значення  $C$  і  $C_{jj}(\lambda_0)$ , відповідно.

Матриця  $C$  є виродженою, отже принаймні одне з її власних значень дорівнює нулю. Нехай  $\lambda_s^C = 0$ , а, значить, маємо для будь-якого мінору  $C_{jj}(\lambda_0)$ :

$$\lambda_1^C \geq \lambda_1^{C_{jj}} \geq \lambda_2^C \geq \lambda_2^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_{s-1}^{C_{jj}} \geq 0 \geq \lambda_s^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_{n-1}^{C_{jj}} \geq \lambda_n^C,$$

тобто кількість додатних та від'ємних власних значень однакове для будь-якого  $C_{jj}(\lambda_0)$ . Оскільки кожен мінор дорівнює добутку своїх власних значень, то всі мінори  $C_{jj}(\lambda_0)$  матриці  $C$  мають один знак.

Таким чином, лему, а разом з нею і теорему 3, доведено.

Зауважимо, що із доведення леми витікає наступне твердження.

**Теорема 4 (про чергування знаків кутового мінору характеристичної матриці).**

Знаки кутового мінору матриці  $C = A - \lambda_0 E$ , де  $\lambda_0$  послідовно приймає значення  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , а  $\lambda_k$  – це власні значення симетричної матриці  $A$ , чергуються.

Тобто, якщо об'єднати твердження **леми** та **теорему 4**, то прийдемо до наступного. При числі  $\lambda_j$  всі кутові мінори деякого порядку у матриці  $C$  є від'ємними або позитивними одночасно, а при переході до числа  $\lambda_{j+1}$  всі вони змінюють знак на протилежний.

Зауважимо, що тих властивостей симетричних матриць, які було встановлено у цій статті, бракувало не лише для вирішення проблеми визначення власних значень ермітових операторів у скінченновимірному просторі, але й для більшого розуміння матеріалу під час викладання теорії симетричних матриць як ускладнених аналогів дійсних чисел. Тому ми звертаємося до наших колег – математиків, які у цей час готують нові учбові посібники або монографії з лінійної алгебри, із пропозицією включити ці теореми до складу так званої *обов'язкової програми курсу* (під назвою **теореми** або **леми Олени Набоки**, яка їх сформулювала та довела).

Щодо внеску інших авторів статті. *А. П. Кожушко* розробив математичну модель роботи транспортного засобу і, за її допомогою, виявив важливі властивості спектру та власних форм матриці коливань, які стали предметом цього дослідження і підґрунтям для **теорем 1 – 3**, а саме:

- монотонну залежність спектральних траєкторій від значення зусилля  $R_x$  у зчіпному засобі;
- ефект відштовхування спектральних траєкторій, який приводив до відсутності кратних резонансів;
- ефект обміну координат у власних формах при проходженні зони наближеного резонансу.

Тому у застосуваннях відповідної теорії до техніки та технологій бажано використовувати назву **спектральні ефекти** (або **спектральні явища**) *Андрія Кожушка*.

*Проф. О. Л. Григор'єв* знайшов зв'язок цієї теми із відомими задачами теорії коливань для складних механічних систем, які розв'язував раніше, а також забезпечив плідну комунікацію між співавторами та єдність використаної термінології.

**Висновки.** Показано, що динамічний аналіз транспортного засобу із причепом чи напівпричепом приводить до задачі на власні значення для однопараметричного пучка симетричних матриць.

За додаткового припущення невід'ємності матричного коефіцієнту пучка доведена монотонна залежність спектру від параметра.

Доведено, що при довільному виборі матричних коефіцієнтів будь які зміни параметру пучка не призводять до появи кратного спектру.

При динамічному аналізі транспортного засобу виявлено явище *відштовхування спектральних траєкторій* матричного пучка та вивчено особливості обертання власних форм в околі точок відштовхування.

Доведено нові теореми про розподіл знаків у кутових мінорах симетричної матриці.

#### Список літератури

1. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Моделювання пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 34 – 61.
2. Набока О. О. Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – № 18 (1127). – С. 98 – 108.
3. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання вільних і вимушених коливань рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
4. Григор'єв А. Л., Дерієнко А. І. Алгебраический метод последовательной локализации и расчёта частот свободных колебаний винтового цилиндрического стержня // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 39 (1082). – С. 45 – 70.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1967. – 575 с.
6. Ланкастер П. Теория матриц. – М. : Наука, 1978. – 280 с.
7. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М. : Наука, 1979. – 392 с.
8. Воеводин В. В. Линейная алгебра. – М. : Наука, 1980. – 400 с.
9. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. – М. : Наука, 1969. – 477 с.
10. Геворкян Ю. Л., Григор'єв А. Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике : учебник. – Харьков : НТУ «ХПІ», 2002. – 542 с.

#### References (transliterated)

1. Kozhushko A. P., Grigiriev A. L. Modelyuvannya pov'yazanykh kolyvan' kolisnoho traktora ta tsysterny z ridynoyu na pryamomu shlyakhу zi skladnym rel'yefom [Modeling of coupled oscillations of wheeled tractors and tanks with liquid on a straight road with difficult terrain]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 27 (1303), pp. 34–61.
2. Naboka O. O. Sinkhronizatsiya kolebaniy dvukh svyazannykh plastin Bergera s nelineynym vnutrennim i granichnym dempfirovaniyem. Chast' 1 [On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior and boundary damping. Part 1]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2015, no. 18 (1127), pp. 98–108.
3. Kozhushko A. P., Grigiriev A. L. Matematychnе modelyuvannya vil'nykh i vymushenykh kolyvan' ridyny v horyzontal'niy yemnosti z vil'noyу poverkhneyu [Mathematical modelling of low-frequency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 41–51.
4. Grigiriev A. L., Derienko A. I. Algebraicheskiy metod posledovatel'noy lokalizatsii i raschota chastot svobodnykh kolebaniy vintovogo tsilindricheskogo stержnya [Algebraic methods for consequential localizing and computing screwed cylinder shaft free oscillations frequencies]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2014, no. 39 (1082), pp. 45–70.
5. Gantmake F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka, 1967. 575 p.
6. Lancaster P. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka, 1978. 280 p.
7. Golovina L. I. *Lineynaya algebra i nekotoryye yeye prilozheniya* [Linear algebra and some of its applications]. Moscow, Nauka, 1979. 392 p.
8. Voevodin V. V. *Lineynaya algebra* [Linear algebra]. Moscow, Nauka, 1980. 400 p.
9. Glazman I. M., Lyubich Yu. I. *Konechnomernyy lineynyy analiz* [Finite dimensional linear analysis]. Moscow, Nauka, 1969. 477p.
10. Gevorkyan Yu. L., Grigiriev A. L. *Osnovy lineynoy algebrы i yeye prilozheniy v tekhnike : uchebnik* [Fundamentals of linear algebra and its technical applications : textbook]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2002. 542 p.

Надійшла (received) 16.03.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych)** – кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

**Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiyivna)** – кандидат фізико-математичних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: lena622651@gmail.com.

**Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

О. С. МЕЛЬНИК, А. М. МИКОЛУШКО

## РЕПРОГРАМОВАНІ МУЛЬТИПЛЕКСОРНІ НАНОСХЕМИ

Застосування великих інтегральних схем (ВІС) в цифрових мікро- і нанoeлектронних пристроях дозволяє істотно поліпшити їх експлуатаційні можливості, в першу чергу підвищити надійність і швидкодію, понизити споживану потужність і габаритні розміри. Проте розробка ВІС є тривалим і дорогим процесом, який економічно виправданий тільки при досить великому обсязі випуску. Підвищення спеціалізації інтегральних схем завжди вступає в протиріччя з їх універсальністю. Усунути вказане протиріччя між спеціалізацією і універсальністю можна шляхом розробки ВІС, алгоритми роботи яких можуть бути змінені за бажанням розробника конкретної апаратури, тобто, шляхом створення логічних схем, що настраюються або програмується. В роботі реалізовані автоматизовані методи репрограмування мультимплексорних наносхем для відтворення логічних функцій декількох аргументів. На сучасних автоматизованих системах здійснено проектування та верифікацію нанопристроїв.

**Ключові слова:** мультимплексорні наносхеми, автоматизоване проектування, програмування логічних функцій.

А. С. МЕЛЬНИК, А. М. МИКОЛУШКО

## РЕПРОГРАММИРОВАННЫЕ МУЛЬТИПЛЕКСОРНЫЕ НАНОСХЕМЫ

Применение больших интегральных схем (БИС) в цифровых микро- и нанoeлектронных устройствах позволяет существенно улучшить их эксплуатационные возможности, в первую очередь повысить надежность и быстродействие, снизить потребляемую мощность и габаритные размеры. Однако разработка БИС является длительным и дорогостоящим процессом, который экономически оправдан только при достаточно большом объеме выпуска. Повышение специализации интегральных схем при улучшении указанных выше показателей всегда вступает в противоречие с их универсальностью. Устранить указанное противоречие между специализацией и универсальностью можно путем разработки БИС, алгоритмы, работы которых могут быть изменены по желанию разработчика конкретной аппаратуры, то есть, путем создания логических схем, которые настраиваются или программируются. В работе реализованы автоматизированные методы репрограммирования мультимплексорных наносхем для воспроизведения логических функций нескольких аргументов. На современных автоматизированных системах осуществлено проектирование и верификация наноустройств.

**Ключевые слова:** мультимплексорные наносхеми, автоматизированное проектирование, программирование логических функций.

O. S. MELNYK, A. M. MIKOLUSHKO

## REPROGRAMMABLE MULTIPLEXER NANOCIRCUITS

The use of large-scale integrated circuits (LSIC) in digital micro- and nanoelectronic devices can significantly improve their operational capabilities, primarily improve reliability and performance, reduce power consumption and overall dimensions. However, the development of the LSIC is a long and costly process, which is economically justified only with a fairly large volume of output of finished products. Increasing the specialization of IC contradicts their universality. Eliminating this contradiction between specialization and universality can be through the development of a LSIC, the algorithms of which can be changed at the request of the developer of specific equipment, that is, by programmed logic circuits. In the paper automated methods of multiplexer nanoscale reprogramming for reproducing logical functions of several arguments are realized. The design and verification of nanodevices are realized on modern automated systems

**Key words:** multiplexer nanocircuits, computer-aided design, programmable logic function.

**Вступ.** Під *програмованістю* розуміється не здатність реалізувати заданий алгоритм обробки вхідних кодів, змінюючи програму роботи, як це робить мікропроцесор, а можливість зміни внутрішньої структури *великої інтегральної схеми* (ВІС) так, щоб вона забезпечувала реалізацію заданих логічних функцій на апаратному рівні.

При виготовленні таких ВІС використовується єдиний комплекс фотошаблонів, тому з точки зору виробника це – універсальні виробни. Налаштування ж даної ВІС на заданий алгоритм роботи виконує безпосередньо виробник апаратури, з точки зору якого ця схема реалізує вузько спеціалізовані завдання. В результаті програмування в *інтегральній схемі* (ІС) вносяться зворотні або незворотні зміни структури, які і приводять до набуття заданих характеристик. Відповідно до сказаного, основною перевагою *програмованих логічних інтегральних схем* (ПЛІС) перед спеціалізованими ВІС являється малий час виготовлення ВІС з наперед заданими характеристиками. Залежно від рівня складності одна ПЛІС може замінити до 10 тис. і більше ІС малого і середнього ступенів інтеграції. Отже, така заміна дозволяє значною мірою реалізувати переваги ВІС при низькій вартості виготовлення, що особливо важливо при невеликих обсягах випуску конкретної апаратури.

**Метою** цієї роботи є розробка методів програмування ПЛІС шляхом надмірності їх апаратної частини, тобто введення додаткових виводів і структур налаштування, додавання інформаційних ланцюгів тощо. Реальна швидкодія пристроїв, виконаних на ПЛІС, їх споживання і інші характеристики будуть завжди гірші, ніж у пристроїв на спеціалізованих ВІС. Проте ці характеристики будуть свідомо кращі за аналогічні характеристики апаратури, побудованої на стандартних ІС.

**Репрограмування мультимплексорів в якості логічних елементів.** В якості простих ПЛІС можуть використовуватися *мультимплексори*. Суть використання мультимплексора в якості універсального логічного нанoelementу полягає в тому, що його адресні входи використовуються як інформаційні і на них подаються аргументи відтвореної функції, а інформаційні входи виконують роль репрограмованих (настроювальних).

Наприклад, реалізуємо на мультимплексорі (4→1) логічну функцію двох аргументів «Виключне АБО» (дода-

вання по модулю 2 чи нерівнозначності):

$$f_{\oplus} = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = x_1 \oplus x_0, \quad (1)$$

задану у вигляді таблиці істинності (табл. 1).

Таблиця 1 – Таблиця істинності операції «Виключне АБО»

| $x_1$ | $x_0$ | $f_{\oplus}$ |
|-------|-------|--------------|
| 0     | 0     | 0            |
| 0     | 1     | 1            |
| 1     | 0     | 1            |
| 1     | 1     | 0            |

Таблиця 2 – Таблиця істинності мультиплексора (4→1)

| $x_1$ | $x_0$ | $f_{\oplus}$ |
|-------|-------|--------------|
| 0     | 0     | $D0$         |
| 0     | 1     | $D1$         |
| 1     | 0     | $D2$         |
| 1     | 1     | $D3$         |

Використовуючи рівняння вихідної функції цього мультиплексора, а саме:

$$f = D3(x_1 x_0) \vee D2(x_1 \bar{x}_0) \vee D1(\bar{x}_1 x_0) \vee D0(\bar{x}_1 \bar{x}_0), \quad (2)$$

та його таблицю істинності (табл. 2), порівняємо між собою функції (1), (2) і табл. 1, 2 та запишемо функцію програмування мультиплексора у вигляді:

$$f_{np} = 0(x_1 x_0) \vee 1(x_1 \bar{x}_0) \vee 1(\bar{x}_1 x_0) \vee 0(\bar{x}_1 \bar{x}_0). \quad (3)$$

В результаті реалізуємо цей алгоритм програмування у вигляді табл. 3 і схеми мультиплексора, побудованої на рис. 1. Напруга живлення  $U_{ж}$  реалізує логічну одиницю, а заземлення – логічний нуль.

Таблиця 3 – Значення логічної функції «Виключне АБО»

| $x_1$ | $x_0$ | $f_{np}$ | $D$      | $f$ |
|-------|-------|----------|----------|-----|
| 0     | 0     | 0        | $D0 = 0$ | 0   |
| 0     | 1     | 1        | $D1 = 1$ | 1   |
| 1     | 0     | 1        | $D2 = 1$ | 1   |
| 1     | 1     | 0        | $D3 = 0$ | 0   |

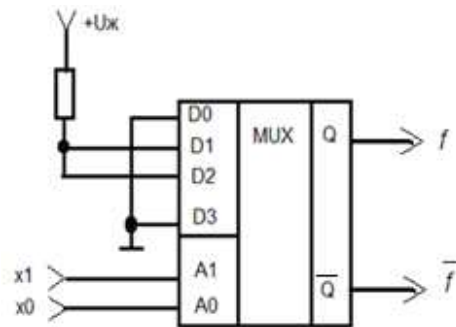


Рис. 1 – Реалізація логічної функції двох вхідних змінних на мультиплексорі.

На мультиплексорі (4→1) можливе репрограмування 16 найпростіших функцій двох аргументів (табл. 4). Для цього на адресні входи A1 та A0 слід подавати бінарні аргументи  $x_1$  та  $x_0$ , а інформаційні  $D3, \dots, D0$  – репрограмувати логічними константами цих аргументів.

З розглянутого прикладу видно, що описаний метод обмежується реалізацією функцій чотирьох змінних, оскільки мультиплексори, що реально випускаються, мають не більше 16 інформаційних входів. Таким чином, для реалізації

$$2^{2^4} = 2^{16} = 65536$$

логічних функцій чотирьох вхідних змінних можна скористатися мультиплексорною наносхемою, яка буде універсальним логічним елементом, оскільки без використання додаткових апаратних засобів дозволяє реалізувати логічну функцію довільного виду.

Для порівняння приклад реалізації операції (1) з використанням п'яти елементів НІ, І та АБО наведений на рис. 2.

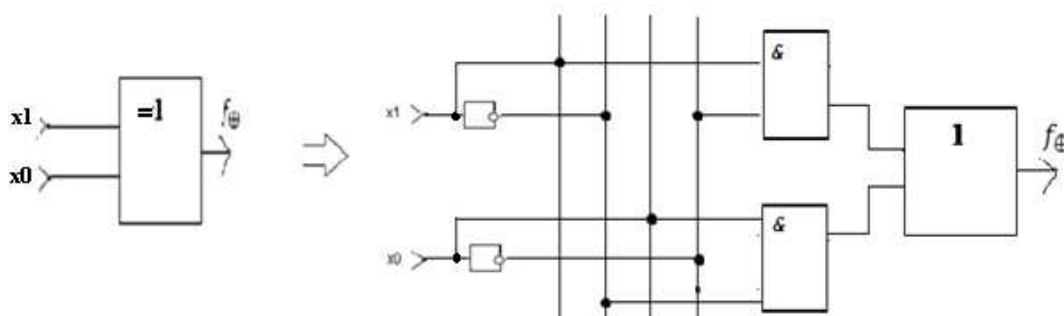


Рис. 2 – Схемна реалізація операції «Виключне АБО».

Таблиця 4 – Функції двох аргументів для репрограмування мультиплексорів

| $x_1$ | 1   | 1   | 0   | 0   | Нормальна диз'юнктивна форма                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Логічна функція                  |
|-------|-----|-----|-----|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $x_0$ | 1   | 0   | 1   | 0   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                  |
| №     | $D$ | $D$ | $D$ | $D$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                  |
| 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | $f_0 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Активний логічний 0              |
| 1     | 0   | 0   | 0   | 1   | $f_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_0 = \overline{x_1 \vee x_0} = x_1 \downarrow x_0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | АБО-НІ (стрілка Пірса)           |
| 2     | 0   | 0   | 1   | 0   | $f_2 = \bar{x}_1 x_0 = x_0 \leftarrow x_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Заборона                         |
| 3     | 0   | 0   | 1   | 1   | $f_3 = \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) = \bar{x}_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Заперечення $x_1$                |
| 4     | 0   | 1   | 0   | 0   | $f_4 = x_1 \bar{x}_0 = x_1 \leftarrow x_0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Зворотна заборона                |
| 5     | 0   | 1   | 0   | 1   | $f_5 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_0 (x_1 \vee \bar{x}_1) = \bar{x}_0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Заперечення $x_0$                |
| 6     | 0   | 1   | 1   | 0   | $f_6 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = x_1 \oplus x_0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Виключне АБО (нерівнозначність)  |
| 7     | 0   | 1   | 1   | 1   | $f_7 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 =$ $= x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 (\bar{x}_0 \vee 1) = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_1 =$ $= x_1 \bar{x}_0 \vee x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_1 x_1 = x_1 (\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_1 (x_0 \vee \bar{x}_1) =$ $= (x_0 \vee \bar{x}_1)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) = \overline{x_1 x_0} = x_1 \mid x_0$ | I-НЕ (штрих Шеффера)             |
| 8     | 1   | 0   | 0   | 0   | $f_8 = x_1 x_0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | I                                |
| 9     | 1   | 0   | 0   | 1   | $f_9 = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = \overline{x_1 \oplus x_0}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Виключне АБО-НІ (рівнозначність) |
| 10    | 1   | 0   | 1   | 0   | $f_{10} = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = x_0 (x_1 \vee \bar{x}_1) = x_0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Активний аргумент $x_0$          |
| 11    | 1   | 0   | 1   | 1   | $f_{11} = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_0 (x_1 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 =$ $= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_0 (\bar{x}_1 \vee 1) = x_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) \vee \bar{x}_0 x_0 \vee x_0 \bar{x}_0 =$ $= \bar{x}_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) \vee x_0 (x_0 \vee \bar{x}_0) = (x_0 \vee \bar{x}_1)(x_0 \vee \bar{x}_0) = \bar{x}_1 \vee x_0 = x_1 \rightarrow x_0$                                                            | Імплікація                       |
| 12    | 1   | 1   | 0   | 0   | $f_{12} = x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 = x_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) = x_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Активний аргумент $x_1$          |
| 13    | 1   | 1   | 0   | 1   | $f_{13} = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 =$ $= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_1 (\bar{x}_1 \vee 1) = \bar{x}_1 (x_1 \vee \bar{x}_0) \vee x_1 (\bar{x}_1 \vee 1) =$ $= \bar{x}_1 (x_1 \vee \bar{x}_0) \vee \bar{x}_0 x_1 \vee x_1 x_1 = (x_1 \vee \bar{x}_0)(x_1 \vee \bar{x}_1) = x_1 \vee \bar{x}_0 = x_0 \rightarrow x_1$                                                              | Зворотна імплікація              |
| 14    | 1   | 1   | 1   | 0   | $f_{14} = x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = (x_1 \vee x_0)(x_1 \vee \bar{x}_1) = x_0 \vee x_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | АБО                              |
| 15    | 1   | 1   | 1   | 1   | $f_{15} = x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = (x_1 \oplus x_0) \vee (\bar{x}_1 \oplus x_0) = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Активна логічна 1                |

При необхідності реалізації логічної функції великого числа вхідних змінних можна скористатися структурою мультиплексорного дерева. Проте при невеликому числі аргументів цю задачу можна вирішувати і іншим методом, а саме вибором сигналів налаштування не з множини  $\{1, 0\}$ , як це було зроблено вище, а з множини  $\{1, 0, x_i\}$ , де  $x_i$  – це один з аргументів відтворюваної функції. В цьому випадку вдається на мультиплексорній наносхемі без додаткових апаратних витрат реалізувати логічну функцію, число аргументів якої на одиницю більше числа його адресних входів.

Наприклад, на мультиплексорі (4→1) реалізуємо логічну функцію трьох вхідних змінних наступного вигляду:

$$f = x_2 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0. \quad (4)$$

Для отримання диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) логічних функцій використовують дужкові перетворення, тобто неповні добутки (терми) домножують на одиночні суми недостаючих аргументів та функцій:  $(x_i \vee \bar{x}_i)$ ,  $(x_i \vee 1)$ ,  $(f_i \vee \bar{f}_i)$ ,  $(f_i \vee 1)$  або додають нульові добутки  $(x_i \bar{x}_i)$ ,  $(x_i 0)$ ,  $(f_i \bar{f}_i)$ ,  $(f_i 0)$ .

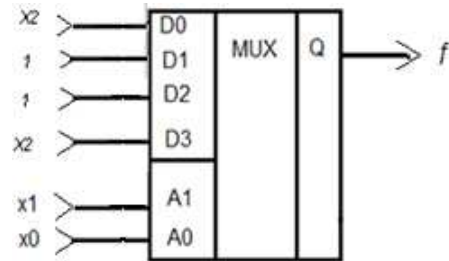
Перетворимо за цими правилами задану функцію (4):

$$\begin{aligned}
 f &= x_2(x_1 \vee \bar{x}_1)(x_0 \vee \bar{x}_0) \vee x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1x_0 = x_2x_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1x_0 = \\
 &= x_2x_1x_0 \vee x_1\bar{x}_0(x_2 \vee 1) \vee \bar{x}_1x_0(x_2 \vee 1) \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 = x_2(x_1x_0) \vee 1(x_1\bar{x}_0) \vee 1(\bar{x}_1x_0) \vee x_2(\bar{x}_1\bar{x}_0).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Отже отримано функцію програмування (5) мультиплексора (4→1), у якого на адресні входи подано сигнали змінних  $x_1$  і  $x_0$ . Таблиця і схема програмування у цьому прикладі наведені на рис. 3.

| $x_1$ | $x_0$ | $D$        |
|-------|-------|------------|
| 0     | 0     | $D0 = x_2$ |
| 0     | 1     | $D1 = 1$   |
| 1     | 0     | $D2 = 1$   |
| 1     | 1     | $D3 = x_2$ |

а



б

Рис. 3 – Функції трьох вхідних змінних: а – таблиця програмування; б – схемна реалізація.

Слід зауважити, що таке схемотехнічне рішення не є єдиним. На адресні входи A1 та A0 можна подавати довільні аргументи  $x_2x_0$  і  $x_2x_1$ , а на програмовані входи  $D3, \dots, D0$  – залишкові аргументи чи навіть функції.

З точки зору апаратних витрат це схематичне рішення (рис. 3, б) є оптимальним.

**Приклад моделювання.** Реалізуємо на мультиплексорних мікро– та наносхемах (4→1) трьохаргументну логічну функцію мажоритарного вибору двох із трьох аргументів. На виході *мажоритарного елемента* (МЕ) логічний сигнал співпадає з більшістю сигналів на непарній кількості входів [1]. На рис. 4 показано умовне позначення тривходового МЕ, а в табл. 5 побудована відповідна таблиця істинності.

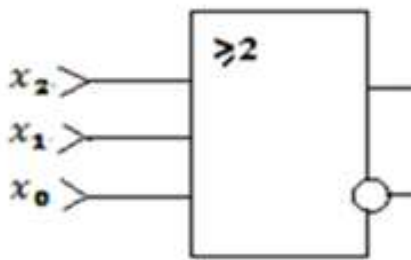


Рис. 4 – Тривходовий МЕ.

Таблиця 5 – Таблиця істинності МЕ

| $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | $f$ | $\bar{f}$ |
|-------|-------|-------|-----|-----------|
| 0     | 0     | 0     | 0   | 1         |
| 0     | 0     | 1     | 0   | 1         |
| 0     | 1     | 0     | 0   | 1         |
| 0     | 1     | 1     | 1   | 0         |
| 1     | 0     | 0     | 0   | 1         |
| 1     | 0     | 1     | 1   | 0         |
| 1     | 1     | 0     | 1   | 0         |
| 1     | 1     | 1     | 1   | 0         |

Диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ) мажоритарної функції  $f$  отримують з її таблиці істинності за правилом:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1x_0. \quad (6)$$

Виконавши дужкові перетворення рівняння (6) шляхом триразового логічного додавання останнього доданку, знаходять *довершену форму мажоритарної функції* наступного типу:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = x_2x_1(\bar{x}_0 \vee x_0) \vee x_2x_0(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1x_0(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_2x_1 \vee x_2x_0 \vee x_1x_0. \quad (7)$$

Мажоритарна функція мінімальної форми (7) є найбільш поширеною в наноелектроніці. Інверсну мажоритарну функцію називають *міноритарною*:

$$\bar{f} = maj(\bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_0) = min(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0. \quad (8)$$

Якщо один з входів МЕ запрограмувати сигналом  $x_2 = 0$  чи  $x_2 = 1$ , то як видно з табл. 5, на прямому виході МЕ реалізуються логічні функції помноження I ( $f_I = x_1x_0$ ) чи додавання АБО ( $f_{АБО} = x_1 \vee x_0$ ).

Перетворимо повну мажоритарну функцію (6) для програмування мультиплексора (4→1) при використанні в якості адресних аргументів  $x_1$  і  $x_0$ . Виконаємо спрощені дужкові перетворення цієї функції:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = x_1x_0(\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 = x_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0. \quad (9)$$

Порівнюючи вихідну функцію мультиплексора (2) з перетвореною МЕ (9), запишемо функцію програмування мультиплексора (4→1) для реалізації мажоритарної функції:

$$f_{np} = 1(x_1x_0) \vee x_2(x_1\bar{x}_0) \vee x_2(\bar{x}_1x_0) \vee 0(\bar{x}_1\bar{x}_0). \quad (10)$$

Отже, згідно рівнянню (10) на інформаційні входи мультиплексора слід подавати наступні сигнали  $D3=1$ ,

$D2 = D1 = x_2$  та  $D0 = 0$ .

Рішення (10) не є єдиною існуючим. На адресні входи мультимплексора  $A_1$  та  $A_0$  можливо подавати довільні набори аргументів, наприклад  $x_2x_0$  або  $x_2x_1$ , а на інформаційні входи  $D3 \dots D0$  – залишкові аргументи та логічні сигнали з множини  $\{1, 0\}$ . В першому випадку функція програмування матиме вигляд:

$$f_{np}(x_2x_0) = 1(x_2x_0) \vee x_1(\bar{x}_2\bar{x}_0) \vee x_1(\bar{x}_2x_0) \vee 0(\bar{x}_2\bar{x}_0),$$

а в другому:

$$f_{np}(x_2x_1) = 1(x_2x_1) \vee x_0(x_2\bar{x}_1) \vee x_0(x_2\bar{x}_1) \vee 0(\bar{x}_2\bar{x}_1).$$

Таким чином, практичне програмування мажоритарної функції (7) на базі мультимплексорів (4→1) свідчить, що при будь-якій комбінації адресних аргументів на виході реалізується однотипні функції програмування.

**Результати комп'ютерного моделювання.** На рис. 5 побудована функціональна схема запрограмованого мультимплексора в графічному редакторі системи автоматизованого проектування (САПР) MAX+PLUS II, яка є інтегрованим середовищем для розробки цифрових пристроїв на базі програмованих логічних схем (ПЛІС) фірми ALTERA [2]. Вона складається з восьми мікросхем: трьох інверторів НЕ, чотирьох тривходових логічних елементів І і одного чотиривходового логічного елемента АБО, має два адресних входи, чотири інформаційних і один комплементарний вихід.

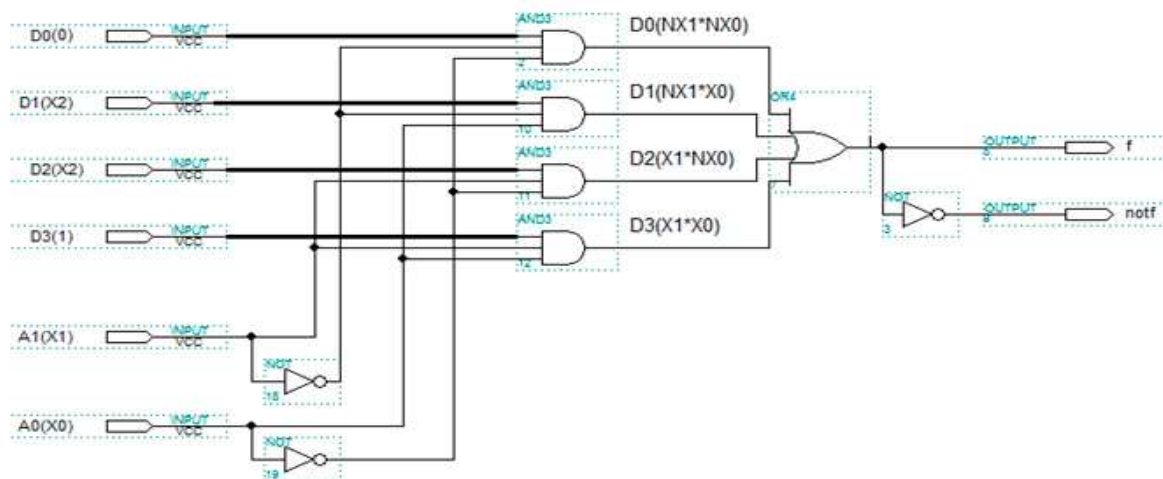


Рис. 5 – Мікросхема запрограмованого мультимплексора.

Часовий аналіз вхідних і вихідних сигналів результатів програмування мажоритарної функції (7) наведений у вікні редактора діаграм на рис. 6. Він повністю відповідає таблиці істинності МЕ (табл. 5).

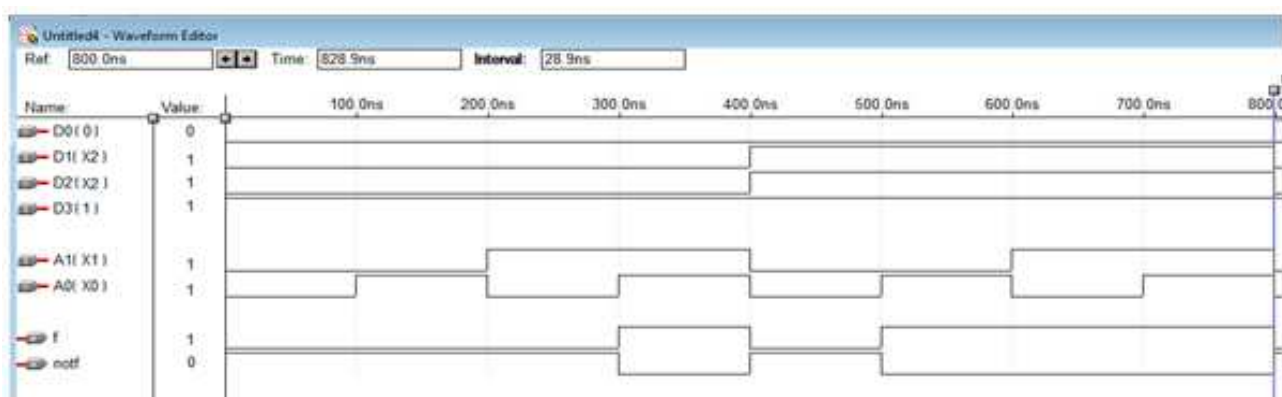


Рис. 6 – Часові діаграми запрограмованого мультимплексора.

Далі синтезуємо одноквантову наносхему мультимплексора (4→1) на квантових коміркових автоматах (КА). Базова діелектрична комірка КА розміром (50×50) нм містить чотири напівпровідникові чи металеві квантові точки (острівці), які геометрично розміщені по куткам квадрату, як показано на рис. 7. Комірки використовуються для побудови нанопровідників, мажоритарних елементів, інверторів, запам'ятовуючих пристроїв тощо [3].

Принцип дії КА, заснований на квантовому тунелюванні та кулонівській взаємодії електронів, дозволяє створювати пристрої, які можуть працювати як комутуючі транзистори, але з меншими розмірами та меншою споживаною потужністю. Однорідна архітектура КА може бути сформована за допомогою електронної літографії.

Кожна комірка може містити два надлишкові електрони, які в змозі тунелювати між квантовими точками. Коли потенціал діелектричних перетинок між точками високий, електрони будуть локалізовані та не зможуть тунелювати, а коли потенціал низький, то електрони зможуть вільно тунелювати. Кулонівське відштовхування між електронами примусить їх розташуватися на діаметрально протилежних кутках з двома можливими конфігураціями (рис. 7). Ці два стабільні стани можуть бути представлені як поляризації комірок  $P = -1$  та  $P = +1$ . Рівень поляризації  $P = -1$  відповідає логічному нулю (рис. 7, а), а  $P = +1$  відповідає логічній одиниці (рис. 7, б). Якщо в масиві КА, отриманому після розміщення декількох комірок в ряд, змінити поляризацію першої комірки в визначений стан, то друга комірка прийме той же стан по принципу найменшої енергії. Далі по принципу доміно всі комірки масиву набудуть цей же рівень поляризації.

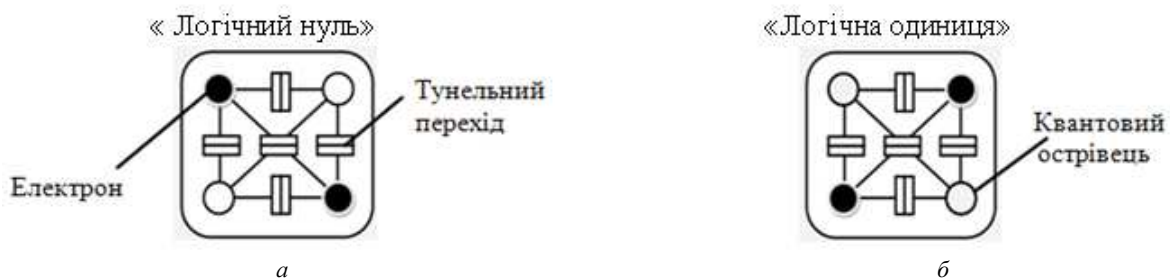


Рис. 7 – Базова комірка в двох можливих логічних станах: а – логічний нуль; б – логічна одиниця.

Поляризація комірки  $P$  визначається співвідношеннями:

$$P = \frac{\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4} = \frac{(\rho_1 + \rho_3) - (\rho_2 + \rho_4)}{(\rho_1 + \rho_3) + (\rho_2 + \rho_4)},$$

де  $\rho_1$  і  $\rho_3$ ,  $\rho_2$  і  $\rho_4$  – щільності зарядів електронів у діагонально розташованих квантових точках комірки.

Таким чином, бінарна інформація передається без руху зарядів. Тобто нема протікання струму між комірками. Це – основна причина, чому структури КА споживають надмірну кількість енергії  $\sim 10^{-22}$  Дж.

На рис. 8 наведена наносхема мультиплексора на 3 інверторах і 11 МЕ, яка запрограмована для реалізації мажоритарної функції (7).

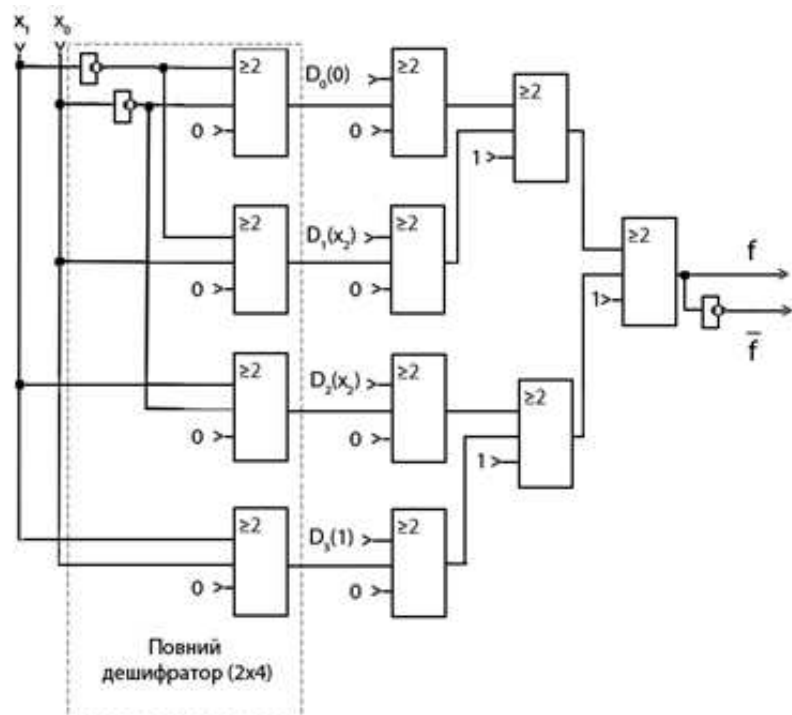


Рис. 8 – Мажоритарна наносхема запрограмованого мультиплексора.



На рис. 9, а побудована мажоритарна наносхема на КА запрограмованого мультиплексора (4→1), яка реалізує функцію мажоритарного вибору, а на рис. 9, б – часові діаграми, отримані в результаті моделювання на САПР QCA Designer [3]. Сигнали вихідної функції  $f$  повністю співпадають з табличними значеннями для МЕ (табл. 5).

Запрограмована таким чином наносхема мультиплексора (4 – 1) базується на 114 квантових коміркох автоматах, розмір яких складає (18×18) нм, відстань між їх центрами дорівнює 20 нм, з чотирма квантовими островами діаметром по 5 нм. Загальна площа наносхеми мультиплексора дорівнює

$$(454,8 \times 362,81) \text{ нм}^2 = 0,16 \text{ мкм}^2.$$

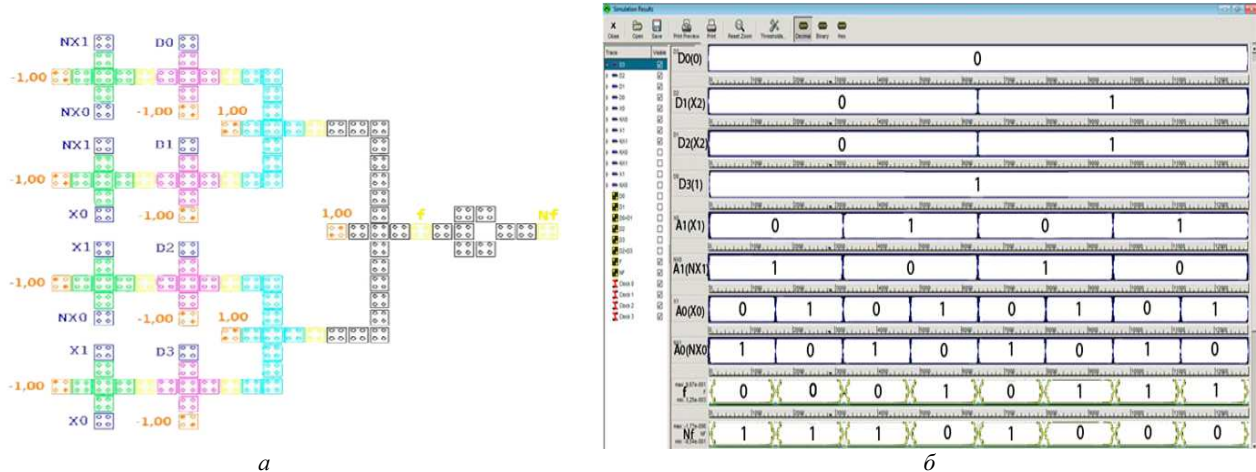


Рис. 9 – Наносхема мультиплексора: а – на квантових коміркох автоматах; б – часові характеристики.

При розробці складних логічних пристроїв доводиться стикатися з виконанням однотипних операцій І та АБО над різною кількістю змінних. В якості прикладів запрограмуємо мультиплексори (4→1) на виконання логічних функцій помноження та додавання декількох аргументів:

$$f_I = x_n \dots x_2 x_1 x_0 = \Lambda_{i=0}^n x_i; \quad (11)$$

$$f_{ABO} = x_n \vee \dots \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0 = V_{i=0}^n x_i. \quad (12)$$

Після дужкових перетворень функції (11) та після домножень суми аргументів  $[x_n \vee \dots \vee x_2]$  на одиничні суми недостаючих аргументів  $(x_1 \vee \bar{x}_1)$ ,  $(x_0 \vee \bar{x}_0)$ , а аргументів  $x_1$  – на  $(x_0 \vee \bar{x}_0)$  та  $x_0$  – на  $(x_1 \vee \bar{x}_1)$ , відповідно, функції (12), отримують наступні функції програмувань:

$$f_{np.I} = [\Lambda_{i=2}^n x_i] (x_1 x_0) \vee 0(x_1 \bar{x}_0) \vee 0(\bar{x}_1 x_0) \vee 0(\bar{x}_1 \bar{x}_0), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_{np.ABO} &= \left[ \bigvee_{i=2}^n x_i \right] (x_1 \vee \bar{x}_1)(x_0 \vee \bar{x}_0) \vee x_1(x_0 \vee \bar{x}_0) \vee x_0(x_1 \vee \bar{x}_1) = \\ &= \left[ \bigvee_{i=2}^n x_i \right] (x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0) \vee (x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0) = \\ &= \left( \left[ \bigvee_{i=2}^n x_i \right] \vee 1 \vee 1 \right) x_1 x_0 \vee \left( \left[ \bigvee_{i=2}^n x_i \right] \vee 1 \right) \bar{x}_1 x_0 \vee \left( \left[ \bigvee_{i=2}^n x_i \right] \vee 1 \right) \bar{x}_1 \bar{x}_0 = 1(x_1 x_0) \vee 1(x_1 \bar{x}_0) \vee 1(\bar{x}_1 x_0) \vee \left[ \bigvee_{i=2}^n x_i \right] \bar{x}_1 \bar{x}_0. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 10 наведено схемотехнічні реалізації задач програмування функцій (11) та (12) на мультиплексорах (4→1).

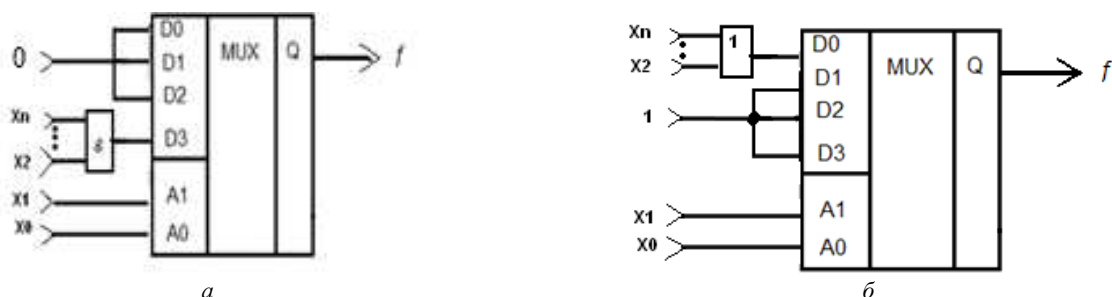


Рис. 10 – Схемні реалізації програмування багатоаргументних операцій: а – операція І; б – операція АБО.

Далі, з використанням отриманих результатів, реалізуємо на мультиплексорі (4→1) складнішу логічну функцію чотирьох аргументів:

$$f = x_3 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_3 x_0. \quad (15)$$

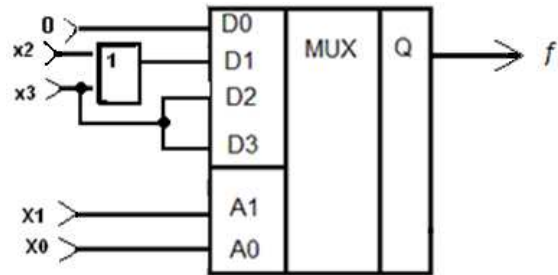
Оберемо в якості адресних змінних  $x_1$  та  $x_0$ , і тому домножимо останній неповний добуток (терм)  $x_3 x_0$  на одиночну суму недостаючої змінної ( $x_1 \vee \bar{x}_1$ ):

$$f = x_3 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 x_0 (x_1 \vee \bar{x}_1) = x_2 (x_1 x_0) \vee x_2 (x_1 \bar{x}_0) \vee (x_3 \vee x_2) (\bar{x}_1 x_0) \vee 0 (\bar{x}_1 \bar{x}_0). \quad (16)$$

За отриманою функцією (16) на рис. 11 побудовані таблиця та схема програмування мультиплексора, що реалізує початкову функцію (15).

| $x_2$ | $x_1$ | $D$                 |
|-------|-------|---------------------|
| 0     | 0     | $D0 = 0$            |
| 0     | 1     | $D1 = x_3 \vee x_2$ |
| 1     | 0     | $D2 = x_3$          |
| 1     | 1     | $D3 = x_3$          |

a



б

Рис. 11 – Чотириаргументна функція: а – таблиця програмування; б – схематична реалізація.

Використовуючи описаний метод, можна вибирати сигнали репрограмування з ширшої множини, що включає декілька аргументів. При цьому на мультиплексорі з двома адресними входами можна реалізувати логічну функцію трьох, чотирьох і більше змінних. Ефективність використання такого технічного рішення зі збільшенням числа вхідних змінних падає.

**Висновки.** В роботі розроблені мікро- та наносхеми репрограмованих мультиплексорів для реалізації логічних функцій. Програмування мультиплексора виконувалось за допомогою САПР MAX+PLUS II та САПР QCA Designer. Часові діаграми запрограмованих мультиплексорів в різних середовищах співпали з таблицею істинності.

Принципово нова особливість наноелектроніки пов'язана з тим, що для елементів таких малих розмірів починають переважати квантові ефекти. Відомо, що при переході від мікро- до наноелектроніки квантові ефекти є паразитними, наприклад, роботі класичного транзистора при зменшенні розмірів починає заважати тунелювання носіїв заряду. Проте електроніка, яка використовує квантові ефекти, – це основа нової, так званої наногетероструктурної електроніки.

#### Список літератури

1. Мельник О. С., Тодавич С. В. Синтез програмованих наноелектронних пристроїв // Електроніка і системи контролю. – 2013. – № 35. – С. 89 – 94.
2. Стешенко В. Б. ПЛИС фирмы ALTERA : элементная база, система проектирования и языки описания аппаратуры. – М. : Изд. дом. «Додэка – XXI», 2007. – 576 с.
3. Walus K. QCA Designer : A Rapid Design and Simulation Tool for QCA // Int. Journ. of Nanotechn. and Appl. – 2005. – Vol. 2. – № 1. – P. 1 – 7.

#### References (transliterated)

1. Mel'nyk O. S, Todavchich S. V. Syntez programovanykh nanoelektronnykh prystroyiv [Synthesis of programmable nanoelectronic devices]. *Elektronika i systemy kontrolyu* [Electronics and Control Systems]. 2013, no. 35, pp. 89–94.
2. Steshenko V. B. *PLIS firmy ALTERA : elementnaya baza, sistemy proektirovaniya i yazyki opisaniya apparatury* [FPGA by ALTERA firm: element base, design system and, hardware description languages]. Moscow, Izd. dome. "Dodeca – XXI" Publ., 2007. 576 p.
3. Walus K. QCA Designer : A Rapid Design and Simulation Tool for QCA. *Int. Journ. of Nanotechn. and Appl.* 2005, vol. 2, no. 1, pp. 1–7.

Надійшла (received) 03.02.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Мельник Олександр Степанович (Мельник Александр Степанович, Melnyk Oleksandr Stepanovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

**Миколушко Андрій Миколайович (Миколушко Андрей Николаевич, Mykolushko Andriy Mykolayovich)** – асистент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (063) 784-26-34; e-mail: 9shik@nau.edu.ua.

**О. П. НЕЧУЙВИТЕР, О. С. ЧОРНА, К. В. ДАРАГАН, О. В. ПІДЛІСНИЙ, С. О. ЧОРНИЙ**

## **НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ЗАДАЧАХ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ**

Розглядається питання наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях, її значеннями в точках. Кубатурні формули будуються з використанням оператора інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Отримано оцінки похибки наближення кубатурних формул. Наведено чисельний експеримент, який підтверджує теоретичні результати дослідження.

**Ключові слова:** інтеграли від функцій двох змінних, кубатурні формули, інтерлінація функцій.

## **О. П. НЕЧУЙВИТЕР, Е. С. ЧЕРНАЯ, К. В. ДАРАГАН, А. В. ПОДЛЕСНЫЙ, С. А. ЧЕРНЫЙ НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Работа посвящена применению новых информационных операторов для построения кубатурных формул приближенного вычисления интегралов функций двух переменных. В статье рассматриваются кубатурные формулы вычисления двойных интегралов с использованием интерликации в случае, когда информация о функции задана ее следами на линиях, значениями функции в точках. Получена оценка погрешности приближения кубатурных формул на классе дифференцируемых функций.

**Ключевые слова:** интегралы функций двух переменных, кубатурные формулы, интерликация функций.

## **O. P. NECHUIVITER, O. S. CHORNA, K. V. DARAHAN, O. V. PIDLISNYI, S. O. CHORNYI NEW INFORMATIONAL OPERATORS IN PROBLEMS OF NUMERICAL INTEGRATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES**

The thesis is dedicated to applying of new information operators for constructing cubature formulas of approximate calculation of integrals of functions of two variables. The feature of the proposed cubature formulas is using the input information about function as a set of traces of function on lines, a set of values of the function at points. The theory of interlineations of functions is the most effective in this case. The estimate for error of cubature formulas of approximate calculation of the integrals of functions of two variables was derived in case when the information about the function is its traces on perpendicular lines, a set of values of the function at some points. Cubature formula is constructed using the interlineation operator. A computational experiment confirming the validity of the theorem about the computational error is given.

**Key words:** integrals of functions of two variables, cubature formula, interlineation of functions.

**Вступ.** Питанню чисельного інтегрування функцій декількох змінних присвячено багато досліджень. До найбільш відомих класичних методів можна віднести *метод центральних прямокутників, метод трапецій, формулу Сімпсона та формулу Гаусса*. Якщо проводити класифікацію цих досліджень в багатовимірному випадку за типом задання інформації, то при побудові кубатурних формул наближеного обчислення подвійних інтегралів інформація про функцію задавалась значеннями в точках. Чисельне інтегрування при різних інформаційних операторах розглядалося для швидкоосцилюючих функцій двох змінних. У випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на лініях, її значеннями в точках, були побудовані кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінації функцій. Однак для подвійних інтегралів такі методи детально не були розглянуті.

**Аналіз останніх досліджень.** На даний час дуже багато досліджень в чисельних методах присвячено використанню нових інформаційних операторів. Зокрема, в роботах [1 – 6] викладена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням операторів інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємно перпендикулярних лініях та значеннями функції в точках. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних, в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка в своїй побудові використовує сліди функції на оптимально вибраних лініях. В роботах [9 – 15] висвітлена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням операторів інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках. В [16] доведена оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерфлетації та оптимальним вибором взаємно перпендикулярних площин. Нові інформаційні оператори (*інтерлінанти та інтерфлетанти*) можуть також бути використані при чисельному інтегруванні функцій двох та трьох змінних. Так при дослідженні питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку різних інформаційних операторів першим кроком були роботи [17], [18], де досліджувались тригонометричні інтеграли від функцій двох та трьох змінних. Інформація про функцію задавалась відповідно її слідами на лініях та площинах; при побудові кубатурних формул використовувалися оператори кусково-сталої інтерлінації та кусково-сталої інтерфлетації. Питання ж наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів з використанням операторів інтерлінації та інтерфлетації не досліджувалося.

© О. П. Нечуйвітер, О. С. Чорна, К. В. Дараган, О. В. Підлісний, С. О. Чорний, 2019

**Постановка задачі.** Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

побудувати та дослідити кубатурні формули з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерлінації. Інформація про функцію  $f(x, y)$  задається її слідами на лініях (рис. 1) та її значеннями в точках. На класі диференційовних функцій отримати оцінки похибок наближення кубатурних формул.

**Кубатурні формули обчислення інтегралу від функції двох змінних на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації.**

**Означення.** Під слідом функції  $f(x, y)$  на лініях

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = 1/\ell$$

розуміємо відповідно функції однієї змінної:

$$f(x_k, y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad f(x, y_j), \quad 0 \leq x \leq 1.$$



Рис. 1 – Сліди функції  $f(x, y)$ : а –  $f(x_k, y)$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ; б –  $f(x, y_j)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Введемо позначення:

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}; \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_j, \\ 0, & y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell};$$

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}];$$

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = 1/\ell.$$

Розглянемо оператор-інтерліант:

$$Jf(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Для обчислення інтегралу (1) пропонується формула

$$\Phi_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерліанта  $Jf(x, y)$  та отримаємо явний вигляд відповідних кубатурних формул:

$$\Phi_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} dx \int_0^1 f(x_k, y) dy + \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) dx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} dx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy.$$

Розглянемо  $H_1^{2,1}(M, \widetilde{M})$  – клас дійсних функцій, визначених на  $G = [0, 1]^2$  і таких, що частинні похідні по змінній  $x$  та  $y$  обмежені, тобто  $|f^{(1,0)}(x, y)| \leq M$ ,  $|f^{(0,1)}(x, y)| \leq M$ ,  $|f^{(1,1)}(x, y)| \leq \widetilde{M}$ .

**Теорема 1.** Нехай  $f(x, y) \in H_1^{2,r}(M, \widetilde{M})$  та функція задана  $N = 2\ell$  слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих  $f(x_k, y)$ ,  $k = \overline{1, \ell}$ ,  $f(x, y_j)$ ,  $j = \overline{1, \ell}$  в області  $G = [0, 1]^2$ . Для кубатурної формули  $\Phi_1^2$  справедлива наступна оцінка:

$$\rho(I_1^2, \Phi_1^2) = \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y)) dx dy \right| \leq \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2} = \frac{\widetilde{M}}{4N^2}.$$

Доведення. Використавши представлення залишку

$$f(x, y) - Jf(x, y) = \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

наближення  $f(x, y)$  оператором інтерлінантом через  $f^{(1,1)}(x, y)$ , маємо

$$\begin{aligned} \rho(I_1^2, \Phi_1^2) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y)) dx dy \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [f(x, y) - Jf(x, y)] dx dy \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy \leq \\ &\leq \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - y_j| dy = \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \left( -\frac{(x - x_k)^2}{2} \Big|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k} + \frac{(x - x_k)^2}{2} \Big|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \right) \times \\ &\times \left( -\frac{(y - y_j)^2}{2} \Big|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j} + \frac{(y - y_j)^2}{2} \Big|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \right) = \widetilde{M} \ell^2 \frac{\Delta^2}{4} \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2} = \frac{\widetilde{M}}{4N^2}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доведена.

Нехай  $m_1 = m_2 = \ell^2$  та  $N = \ell^4$ . Введемо позначення:

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \quad \tilde{X}_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \quad \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}];$$

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}; \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell};$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1, \ell^2}; \quad \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell^2};$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}; \quad \tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Розглянемо оператор-інтерполянт, побудований на основі сплайн-інтерлінанта  $Jf(x, y)$ :

$$\tilde{J}f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h_{0k}(x) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Для обчислення інтегралу (1) пропонується формула:

$$\tilde{\Phi}_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Підставимо у цю формулу вираз для оператора-інтерполянта  $\tilde{J}f(x, y)$  та отримаємо кубатурну формулу:

$$\tilde{\Phi}_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} dy + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy;$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}; \quad \tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

**Теорема 2.** Нехай  $f(x, y) \in H_1^{2,1}(M, \widetilde{M})$  та значення  $f_{kj} = f(x_k, y_j)$ ,  $k = \overline{1, m_1}$ ,  $j = \overline{1, m_2}$ , задані не більше,

ніж в  $N = m_1 m_2$ ,  $m_1 = m_2 = \ell^2$ ,  $N = \ell^4$  фіксованих вузлових точках  $(x_k, y_j) \in G$ . Для кубатурної формули  $\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$  справедлива наступна оцінка  $\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \frac{\tilde{M} + 8M}{16} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\tilde{M} + 8M}{16} \frac{1}{\sqrt{N}}$ . Для досягнення похибки  $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  кубатурна формула  $\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$  використовує не  $O(\ell^4) = O(N)$  значень функції як класична, а  $O(\ell^3) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$ .

*Доведення.* Розглянемо

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x); \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y);$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x); \quad \tilde{J}_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y),$$

тоді для оператора-інтерлінанта  $Jf(x, y)$  та оператора-інтерполянта  $\tilde{J}f(x, y)$ , побудованого на основі  $Jf(x, y)$ , справедливі тотожності  $(Jf = (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f)$  та  $(\tilde{J}f = (J_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_1 J_2 - J_1 J_2) f)$ .

Знайдемо оцінку  $\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2)$ :

$$\begin{aligned} \rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - \tilde{J}f(x, y)) dx dy \right| \leq \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y) + Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)) dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

Отже,  $\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \rho(I_1^2, \Phi_1^2) + \rho(\Phi_1^2, \tilde{\Phi}_1^2)$ . З теореми 1 маємо:  $\rho(I_1^2, \Phi_1^2) \leq \frac{\tilde{M}}{16\ell^2}$ , а

$$\begin{aligned} \rho(\Phi_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) &\leq \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 + J_2 - J_1 J_2) f - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2) f| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 - J_1 \tilde{J}_2) f + (J_2 - J_2 \tilde{J}_1) f| dx dy \leq \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 - J_1 \tilde{J}_2) f| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |(J_2 - J_2 \tilde{J}_1) f| dx dy \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |f(x_k, y) - f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}})| dy + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} |f(x, y_j) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j)| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \leq \\ &\leq M \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - \tilde{y}_{\tilde{j}}| dy + M \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} |x - \tilde{x}_{\tilde{k}}| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \leq \\ &\leq M \ell \Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 + M \ell \Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 = M \ell \frac{1}{\ell} \frac{\Delta_1}{2} = M \frac{1}{2} \Delta^2 = M \frac{\Delta^2}{2} = \frac{M}{2\ell^2}. \end{aligned}$$

Таким чином,  $\rho(\Phi_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq M \frac{1}{2\ell^2}$  і

$$\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \rho(I_1^2, \Phi_1^2) + \rho(\Phi_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \frac{\tilde{M}}{16\ell^2} + M \frac{1}{2\ell^2} = \left( \frac{\tilde{M}}{16} + \frac{M}{2} \right) \frac{1}{\ell^2} = \frac{\tilde{M} + 2M}{16} \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Підрахуємо кількість значень функції, що використовується при побудові кубатурної формули  $\tilde{\Phi}_1^2$ ,  $Q = \ell \cdot \ell^2 + \ell \cdot \ell^2 - \ell^2 = 2\ell^3 - \ell^2 = O(\ell^3) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$ . Теорема 2 доведена.

На рис. 2 представлений загальний принцип побудови сітки вузлів, яка використовується в кубатурних формулах з операторами інтерлінації.

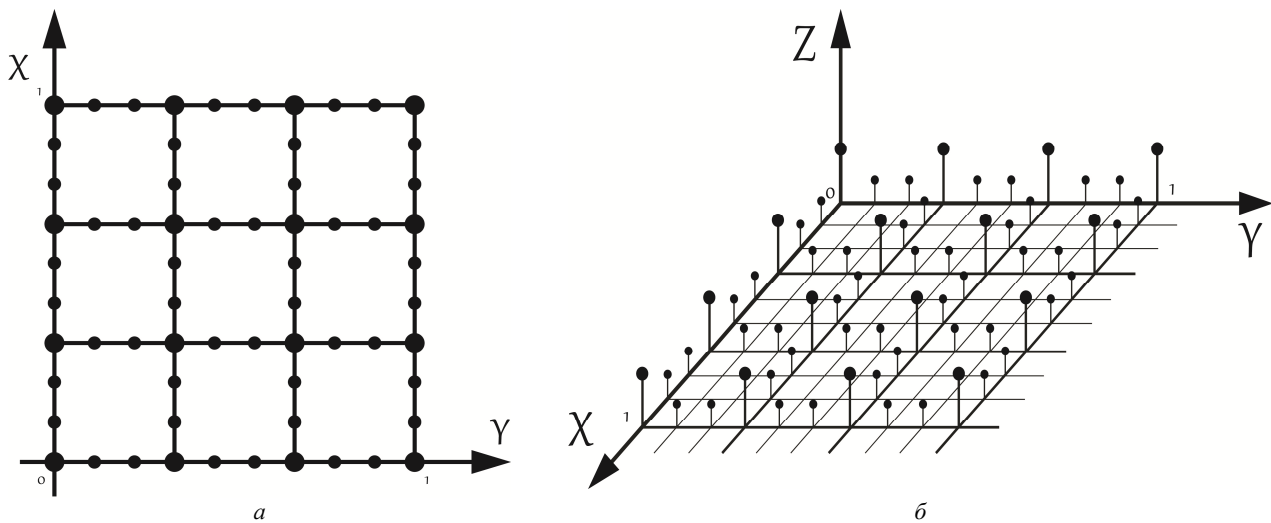


Рис. 2 – Загальний вигляд сітки вузлів для кубатурних формул з використанням операторів інтерлінації: *a* – вузли сітки; *б* – значення функції у вузлах сітки.

**Розрахунковий експеримент.** Наведемо результати тестування запропонованих кубатурних формул в системі комп'ютерної математики MathCad.

**Приклад 1.** Нехай функція задана слідами  $f(x_k, y)$ ,  $k = \overline{1, \ell}$ ,  $f(x, y_j)$ ,  $j = \overline{1, \ell}$  на системі взаємно перпендикулярних прямих  $x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}$ ,  $y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}$ ,  $k, j = \overline{1, \ell}$ ,  $\Delta = \frac{1}{\ell}$ , в області  $G = [0, 1]^2$ . Для обчислення  $I_1^2$  розглянемо кубатурну формулу  $\Phi_1^2$ . На класі  $H_1^{2,1}(M, \tilde{M})$  для функції  $f(x, y) = \frac{1}{2}(\cos(2x - 2y) - \cos(2x + 2y))$  справедливі наступні чисельні результати наближеного обчислення за кубатурною формулою  $\Phi_1^2$  (табл. 1).

Таблиця 1 – Обчислення  $I_1^2$  за допомогою кубатурної формули  $\Phi_1^2$

| $\ell$ | $\Phi_1^2$        | $I_1^2$          | $E =  I_1^2 - \Phi_1^2 $ | $\varepsilon = 1/16\ell^2$ |
|--------|-------------------|------------------|--------------------------|----------------------------|
| 4      | 0.501312762205496 | 0.50136796566562 | 0.000055203460124        | 0.00391                    |
| 6      | 0.501357149641647 | 0.50136796566562 | 0.000010816023973        | 0.00174                    |
| 10     | 0.501366569721889 | 0.50136796566562 | 0.00000139594373         | 0.00063                    |
| 15     | 0.501367690281103 | 0.50136796566562 | 0.000000275384517        | 0.00028                    |
| 20     | 0.501367878571774 | 0.50136796566562 | 0.000000087093845        | 0.00016                    |
| 25     | 0.501367929999473 | 0.50136796566562 | 0.000000035666147        | 0.0001                     |

### Приклад 2.

Для функції  $f(x, y) = \sin(x + y)$ , для якої  $\tilde{M} = 1$ ,  $M = 1$ , покажемо, що:

$$1. |I_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2| \leq \frac{\tilde{M}}{16} \frac{1}{\ell^2} + \frac{M}{2} \frac{1}{\ell^2} = \left( \frac{\tilde{M}}{16} + \frac{M}{2} \right) \frac{1}{\ell^2} = \frac{9}{16} \frac{1}{\ell^2} = \varepsilon;$$

$$2. |I_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2| \leq |I_1^2 - \Phi_1^2| + |\Phi_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}.$$

Точні значення інтегралів  $I_1^2 = 0.773644542790111$  (табл. 2, 3).

Таблиця 2 – Обчислення  $I_1^2$  за квадратурною формулою  $\tilde{\Phi}_1^2$

| $\ell$ | $\tilde{\Phi}_1^2$ | $ I_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2 $ | $\varepsilon$ |
|--------|--------------------|------------------------------|---------------|
| 10     | 0.773650858142159  | 0.000006315352048            | 0.018         |
| 20     | 0.773644937376223  | 0.000000394586111            | 0.045         |
| 30     | 0.773644620728563  | 0.000000077938452            | 0.002         |

Таблиця 3 – Похибки обчислення  $I_1^2$  за формулою  $\Phi_1^2$  та  $\tilde{\Phi}_1^2$  за  $\tilde{\Phi}_1^2$ 

| $\ell$ | $\varepsilon_1 =  I_1^2 - \Phi_1^2 $ | $\varepsilon_2 =  \Phi_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2 $ | $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ |
|--------|--------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 10     | 0.000006315352048                    | 0.000006449743718                               | 0.000006584135388                                     |
| 20     | 0.00000008395805                     | 0.000000402981916                               | 0.000000411377721                                     |
| 30     | 0.00000001658296                     | 0.000000079596748                               | 0.000000081255044                                     |

**Приклад 3.** Метою чисельного експерименту є порівняння формули  $\tilde{\Phi}_1^2$  з формулою:

$$\hat{\Phi}_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \quad (4)$$

за такими параметрами, як кількість використаних значень  $Q$  та  $\hat{Q}$  функції  $f(x, y)$  для досягнення заданої точності. Кубатурна формула  $\tilde{\Phi}_1^2$  використовує в своїй побудові  $Q = \ell \cdot \ell^2 + \ell \cdot \ell^2 - \ell^2 = 2\ell^3 - \ell^2$  значень функції. Для досягнення такої ж точності за допомогою класичної формули  $\hat{\Phi}_1^2$  необхідно використати  $\hat{Q} = \ell^4$  (табл. 4).

Таблиця 4 – Похибки обчислення  $I_1^2$  за формулою  $\tilde{\Phi}_1^2$  та  $\hat{\Phi}_1^2$ 

| $\ell$ | $\varepsilon_1$      | $Q = 2\ell^3 - \ell^2$ | $\varepsilon_2$      | $\hat{Q} = \ell^4$ |
|--------|----------------------|------------------------|----------------------|--------------------|
| 10     | $6.31 \cdot 10^{-6}$ | 1900                   | $6.44 \cdot 10^{-6}$ | 10000              |
| 20     | $3.94 \cdot 10^{-7}$ | 15600                  | $4.02 \cdot 10^{-7}$ | 160000             |
| 30     | $7.79 \cdot 10^{-8}$ | 53100                  | $7.95 \cdot 10^{-8}$ | 810000             |

**Перспективи подальших досліджень.** В статті розглядаються кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях, її значеннями в точках. Отримано оцінки похибки наближення кубатурних формул на класі диференційовних функцій. Аналогічні результати можна отримати для наближеного обчислення інтегралів від функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задається її слідами на площинах, її слідами на лініях, значеннями функції в точках на різних класах функцій.

**Висновки.** На класі диференційовних функцій отримано оцінки похибки наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних у випадку, коли інформація задавалась її слідами на лініях, значеннями функції в точках. Кубатурні формули використовують оператор-інтерлінант та оператор-інтерполянт, побудованих на основі оператора-інтерлінанта з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Основною перевагою запропонованих кубатурних формул є висока точність обчислення та використання меншої кількості значень функції порівняно з класичною формулою. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики MathCad підтверджує теоретичні результати.

#### Список літератури

1. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
2. Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій  $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$  з використанням інтерлінації // Сб. науч. труд. : Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 166 – 169.
3. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 9 – 13.
4. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D-коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
5. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. 2 D-коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
6. Lytvyn Oleg N., Nechuyviter Olesya P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P. 90 – 96.
7. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17–23.
8. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
9. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення 3 D-коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.



10. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетатії на класі диференційовних функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 8. – С. 36 – 41.
11. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций / О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Вестник МГОУ. Сер. : Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.
12. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БелГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – № 19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.
13. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
14. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления 3 D - интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217.
15. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення 3 D-коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетатії // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127 – 113.
16. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлетации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97 – 106.
17. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Обчислення 2 D інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип.13. – С. 124 – 131.
18. Нечуйвітер О. П. Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетатії // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – №16 (1188). – С. 67 – 71.

#### References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannnyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 1998, no. 1, pp. 23–28.
2. Nechuiviter O. P. Kubaturna formula obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy  $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$  z vykorystannnyam interlinatsiyi [Cubature formula for the computation of Fourier coefficients of functions  $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$  using interlineation]. *Sb. nauch. trud. : Nelineynyie kraevyye zadachi matematicheskoy fiziki i ikh prilozheniya* [Collection of scientific works : Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t matematiki NAN Ukrainy Publ., 1999. pp. 166–169.
3. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'na za porядkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy na osnovi splayn-interlinatsiyi [Optimal by the order of exactness cubature formula for computing double integrals from high oscillating functions based on spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2006, no. 6, pp. 9–13.
4. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya 2 D-koefitsientiv Fur'ye z vykorystannnyam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating 2-D Fourier coefficients using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2010, no. 3, pp. 24–29.
5. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 2 D-koefitsienty Fur'ye na klasi diferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D-Fourier coefficients on the class of differentiable functions and spline-interlineation]. *Tavrisheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.
6. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010)*. Novosibirsk, 2010, pp. 90–96.
7. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy z vykorystannnyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals of high oscillating functions using polynomial Lagrange interlineation]. *Shtuchnyy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.
8. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystannnyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using polynomial Lagrange interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.
9. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3 D-koefitsientiv Fur'ye na klasi diferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3 D - Fourier coefficients on the class of differentiable functions using spline-interflatation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2012, no. 3, pp. 45–50.
10. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryokh zminnykh z vykorystannnyam splayn-interfletatsiyi na klasi diferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of Fourier coefficients of functions of three variables using spline-interflatation on a class of differentiable functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2012, no. 8, pp. 36–41.
11. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Priblizhennoe vychislenie osttsilliruyuschikh integralov triokh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate evaluation of oscillating integrals with three variables using interflatation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser. : Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University. Series: physics and mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9.
12. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirvaniya bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh [On the error of numerical integration of high oscillating functions of three variables]. *Nauchnye vedomosti BELGU. Ser. : Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod state University. Series: Mathematics. Physics]. 2013, no. 19 (162), vol. 32, pp. 101–107.
13. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy triokh zminnykh na klasi diferentsiyovnykh funktsiy [Approximate evaluation of Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differentiable functions]. *Shtuchnyy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.
14. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya 3 D-integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of accuracy of cubature formula for computing 3 D-integrals of high oscillating functions using interflatation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.
15. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3 D-koefitsientiv Fur'ye na klasi Geldera z vykorystannnyam kuskovo-staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3 D Fourier coefficients on the Holder class of functions using piecewise constant spline-interflatation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, no. 4, pp. 127–113.
16. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Priblizhennoe vychislenie integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy triokh peremennykh s ispol'zovaniem lagranzhevoy polinomial'noyi interfletatsii [Approximate calculation of integrals of high oscillating functions of three variables by using Lagrange

- an polynomial interflatation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and systems analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106.
17. Nechuiviter O. P., Keyta K. V. Obchyslennya 2 D integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo-staloyi interlinatsiyi [Calculation of 2 D integrals of trigonometric functions using piecewise constant spline-interlineation]. *Matematychna ta komp'uterna modelyuvannya. Seriya : Fyzyko-matematychni nauky : zb. nauk. prats'* [Mathematical and computer modeling. Series: Physics and mathematics: Coll. Scientific works]. Kamenetz – Podolsky, Kam'yanets' – Podil's'kyi natsional'nyy universitet im. Ivana Oghienka Publ., 2016, vol. 13, pp. 124–131.
  18. Nechuiviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo-staloyi interflatatsii [Computing triple integrals of trigonometric function using piecewise constant interflatation]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychna modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 16 (1188), pp. 67–71.

Надійшло (received) 22.04.2019

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Нечуйвітер Олеся Петрівна (Нечуивитер Олеся Петровна, Nechuiviter Olesia Petrivna)** – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

**Чорна Олена Сергіївна (Чорна Елена Сергеевна, Chorna Olena Sergiivna)** – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena1402@ukr.net.

**Дараган Катерина Володимирівна (Дараган Катерина Владимировна, Darahan Kateryna Volodymyrivna)** – аспірантка, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: keitakaterina@gmail.com.

**Підлісний Олександр Валерійович (Подлесный Александр Валерьевич, Pidlisnyi Oleksandr Valeriyovych)** – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: podlesnyy1994@gmail.com.

**Чорний Сергій Олександрович (Чорный Сергей Александрович, Chornyi Sergii Oleksandrovych)** – студент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: sergej131280@ukr.net.

УДК 621.923

**Ф. В. НОВИКОВ, В. И. ПОЛЯНСКИЙ****АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ**

Предложен теоретический подход к расчету параметров механической обработки с позиции закона сохранения энергии. Показана определяющая роль условного напряжения резания в формировании параметров силовой напряженности процесса резания. Расчетно-экспериментальным путем установлено, что условное напряжение резания при лезвийной обработке до 10 раз и более превышает предел прочности на сжатие обрабатываемого материала. Это связано с тем, что основную часть энергетического баланса процесса составляет энергия трения инструмента с обрабатываемым материалом. В связи с этим произведена оценка долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки. Показано, что условный угол сдвига обрабатываемого материала вполне однозначно определяется отношением предела прочности на сжатие обрабатываемого материала и условного напряжения резания.

**Ключевые слова:** сила резания, условное напряжение резания, энергоёмкость, сдвиг материала, точение, инструмент, трение.

**Ф. В. НОВИКОВ, В. И. ПОЛЯНСКИЙ****АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕХАНІЧНОЇ ОБРОБКИ**

Запропоновано теоретичний підхід до розрахунку параметрів механічної обробки з позиції закону збереження енергії. Показано визначальну роль умовного напруження різання у формуванні параметрів силової напруженості процесу різання. Розрахунково-експериментальним шляхом встановлено, що умовне напруження різання при лезовій обробці до 10 разів і більше перевищує межу міцності на стиск оброблюваного матеріалу. Це пов'язано з тим, що основна частина енергетичного балансу процесу є енергія тертя інструменту з оброблюваним матеріалом. У зв'язку з цим проведено оцінювання часток енергій "чистого" різання і тертя в загальній енергоємності процесу механічної обробки. Показано, що умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу цілком однозначно визначається відношенням межі міцності на стиск оброблюваного матеріалу і умовного напруження різання.

**Ключові слова:** сила різання, умовне напруження різання, енергоємність, зсув матеріалу, точіння, інструмент, тертя.

**F. V. NOVIKOV, V. I. POLYANSKY****ANALYTIC DETERMINATION OF TECHNOLOGICAL PARAMETERS OF MECHANICAL PROCESSING**

A theoretical approach to the calculation of the parameters of mechanical processing from the standpoint of the law of energy conservation is proposed. The decisive role of the conditional cutting stress in the formation of the parameters of the power intensity of the cutting process is shown. By calculation and experimentally it is established that the conditional cutting voltage during blade processing is up to 10 times or higher than the com-

© Ф. В. Новиков, В. И. Полянский, 2019

pressive strength of the material being processed. This is due to the fact that the main part of the energy balance of the process is the energy of friction of the tool with the material being processed. In this regard, an assessment was made of the fraction of the energies of "clean" cutting and friction in the overall energy intensity of the machining process. It is shown that the conditional shear angle of the material being processed is quite uniquely determined by the ratio of the compressive strength of the material being processed to the conditional cutting stress.

**Key words:** cutting force, conditional cutting stress, energy intensity, material shear, turning, tool, friction.

**Введение.** Механическая обработка среди всего многообразия методов физико-технической обработки материалов является наименее энергозатратной и наиболее экологически чистой, что способствует ее широкому применению в производстве, обеспечивая высокие показатели качества, точности и производительности. В настоящее время благодаря применению на предприятиях современных металлорежущих станков с ЧПУ типа «обрабатывающий центр» и сборных твердосплавных и керамических режущих инструментов с износостойкими покрытиями зарубежного производства появились новые технологические возможности совершенствования механической обработки. Как показывает практика, производительность может быть увеличена до 10 и более раз при одновременном обеспечении высококачественной обработки. Однако для практической реализации указанных технологических возможностей новых станков и режущих инструментов необходимо правильно выбирать оптимальные условия обработки. Важное значение при этом имеет математическое моделирование процесса механической обработки и установление его основных физических закономерностей с целью выявления и реализации наиболее существенных физических эффектов обработки, обеспечивающих повышение технико-экономических показателей процесса резания. В связи с этим, настоящая работа посвящена аналитическому определению технологических параметров механической обработки.

**Анализ последних исследований.** Вопросы математического моделирования и оптимизации процессов механической обработки отражены в многочисленных работах, опубликованных в научно-технической литературе, среди которых особо следует выделить работы [1 – 3], посвященные математическому моделированию механики процесса резания и установлению аналитических зависимостей основных технологических параметров обработки. Однако, учитывая сложность механических процессов, происходящих при резании, полностью эти задачи не решены. Отсутствуют аналитически установленные взаимосвязи параметров режима резания с параметрами процесса стружкообразования при резании, а расчетные и экспериментальные данные, например, условного угла сдвига обрабатываемого материала имеют значительные расхождения. Это не позволяет аналитически определить параметры силовой и тепловой напряженности процесса резания, что требует применения новых теоретических подходов для раскрытия физических закономерностей процесса резания, основанных, в первую очередь, на фундаментальном законе сохранения энергии.

**Постановка задачи.** В настоящей работе с позиции закона сохранения энергии необходимо разработать математическую модель определения основных параметров механической обработки, обеспечивающую высокую степень их сходимости с экспериментальными данными. Это позволит аналитически описать технологические параметры механической обработки и научно обоснованно подойти к выбору оптимальных параметров режима резания и характеристик режущего инструмента в зависимости от технических требований на обработку.

**Математическая модель.** В процессе резания лезвийным инструментом происходит отделение стружки от обрабатываемого материала по схеме, показанной на рис. 1. Так, при перемещении инструмента (резца) со скоростью резания  $V$  в горизонтальном направлении на величину  $\Delta z$  в условной плоскости сдвига ОА (где касательное напряжение  $\tau$  максимально) происходит сдвиг обрабатываемого материала на величину  $\Delta l$ . При этом одновременно происходит перемещение обрабатываемого материала вдоль передней поверхности резца на величину  $\Delta y$ . В этих трех рассмотренных направлениях соответственно возникают три силы:  $P_x$ ,  $P$  и  $P_y$ .

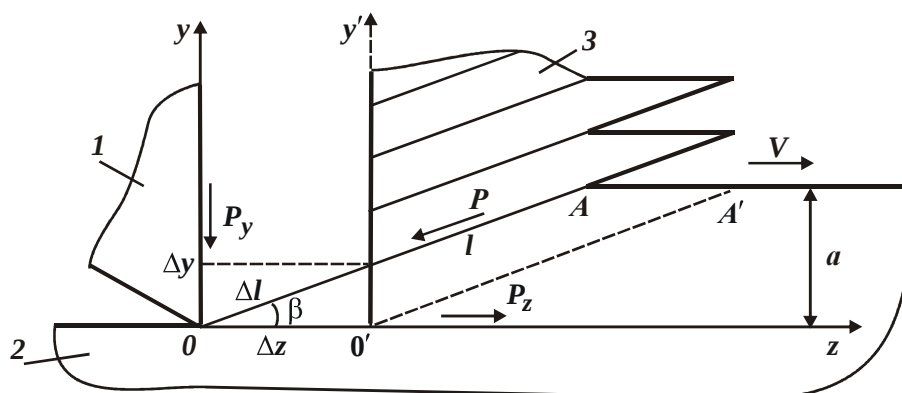


Рис. 1 – Расчетная схема параметров процесса резания:  
1 – инструмент; 2 – обрабатываемый материал; 3 – образующаяся стружка.

При нулевом переднем угле резца силы  $P_z$  и  $P_y$  определяют тангенциальную и радиальную составляющие силы резания. Тогда работа резания, определяемая произведением  $P_z \cdot \Delta z$ , равна сумме работ, выполняемых

двумя остальными силами  $P$  и  $P_y$ , то есть  $P \cdot \Delta l$  и  $P_y \cdot \Delta y$ . В итоге получено уравнение, соответствующее закону сохранения энергии при резании:

$$P_z \cdot \Delta z = P_y \cdot \Delta y + P \cdot \Delta l, \quad (1)$$

где  $P = \tau \cdot \delta \cdot l$  – сила, возникающая в условной плоскости сдвига ОА (рис. 1), Н;  $\tau$  – касательное напряжение, возникающее в условной плоскости сдвига ОА длиной  $l$ , Н/м<sup>2</sup>;  $\delta$  – ширина среза, м;  $l = a / \sin \beta$  – длина условной плоскости сдвига ОА, м;  $a$  – толщина среза, м;  $\beta$  – условный угол сдвига обрабатываемого материала.

Разделив все слагаемые уравнения (1) на величину  $\Delta l$ , с учетом  $\cos \beta = \Delta x / \Delta l$ ;  $\sin \beta = \Delta y / \Delta l$ , получаем:

$$P_z \cdot \cos \beta = P_y \cdot \sin \beta + P. \quad (2)$$

Принимая при точении резцом с нулевым передним углом  $\gamma$  известные соотношения [4]:  $P_y / P_z = \tan \psi = f$ ;  $P_z = \sigma \cdot a \cdot \delta$ , и разрешая уравнение (2) относительно касательного напряжения  $\tau$ , имеем:

$$\tau = \frac{\sigma}{2 \cos \psi} \cdot [\sin(\psi + 2\beta) - \sin \psi], \quad (3)$$

где  $\psi$  – условный угол трения на передней поверхности резца;  $f$  – коэффициент трения инструментального и обрабатываемого материалов;  $\sigma$  – условное напряжение резания, Н/м<sup>2</sup>.

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  достигается при условии  $\sin(\psi + 2\beta) = 1$  или

$$\beta = 45^\circ - \frac{\psi}{2}. \quad (4)$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы  $\tau_{\max} = \tau_{\text{сдв}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{сж}}$ , а условное напряжение резания  $\sigma$  приняло значение, определяемое из зависимости (3):

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{сж}} \cdot \cos \psi}{1 - \sin \psi} = \frac{1}{\tan\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)} = \frac{1}{\tan \beta}, \quad (5)$$

где  $\tau_{\text{сдв}}$ ,  $\sigma_{\text{сж}}$  – соответственно, пределы прочности на сдвиг и сжатие обрабатываемого материала, Н/м<sup>2</sup>.

Из зависимости (5) вытекает, что угол  $\beta$  вполне однозначно определяется отношением  $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$ , то есть:

$$\tan \beta = \frac{\sigma_{\text{сж}}}{\sigma}. \quad (6)$$

Из зависимости (5) также вытекает, что с увеличением угла  $\psi$  условное напряжение резания  $\sigma$  увеличивается. Наименьшее значение  $\sigma$  достигается при  $\psi = 0$ , то есть при условии  $\sigma = \sigma_{\text{сж}}$ , что имеет место при одноосном сжатии стержня. В табл. 1 приведены рассчитанные по зависимости (6) значения условного угла сдвига обрабатываемого материала  $\beta$  в зависимости от отношения  $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$ . Как видно, угол  $\beta$  увеличивается с увеличением отношения  $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$ .

Таблица 1 – Расчетные значения условного угла сдвига  $\beta$  обрабатываемого материала

|                               |     |     |     |     |     |     |     |
|-------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 1,0 |
| $\beta$ , град                | 6   | 11  | 17  | 22  | 27  | 31  | 45  |

Располагая экспериментальными значениями угла  $\beta$ , можно по зависимости (6) определить условное напряжение резания  $\sigma$ , а по нему – тангенциальную составляющую силы резания  $P_z$ . Очевидно, после достижения в условной плоскости сдвига ОА касательным напряжением  $\tau$  предела прочности на сдвиг обрабатываемого материала  $\tau_{\text{сдв}}$ , имеет место дальнейшее скольжение (перемещение) отделяющегося элемента материала вдоль условной плоскости сдвига ОА до тех пор, пока произойдет отделение нижерасположенного элемента материала (при условии  $\tau_{\max} = \tau_{\text{сдв}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{сж}}$ ). В результате возникающая тангенциальная составляющая силы резания  $P_z$  равна удвоенному значению элементарной тангенциальной составляющей силы резания, вызывающей сдвиг материала в условной плоскости сдвига ОА. Кроме того, суммарную тангенциальную составляющую силы резания  $P_z$  будет определять еще и составляющая, вызванная трением задней поверхности инструмента с обрабатываемым материалом. Поэтому, зная экспериментальное значение  $P_z$ , с использованием зависимости (6) можно определить все составляющие силы  $P_z$ , связанные с процессом стружкообразования на передней поверхности инструмента и трением на задней поверхности инструмента.

**Определение долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоемкости процесса механической обработки.** В табл. 2 приведены экспериментальные значения тангенциальной составляющей силы резания  $P_z$ , полученные профессором *Коломийцем В. В.* [4], при продольном точении закаленных сталей: Р6М5

(HRC 64) и стали 45 (HRC 50) резцами из эльбора–Р с главным углом резца в плане  $\varphi = 45^\circ$ , режимом резания:  $S = 0,07$  мм/об.;  $t = 0,2$  мм и  $h_{\text{зад}} = 0,1$  мм. Также приведены расчетные значения параметров  $\sigma = P_z / (S \cdot t)$  и  $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$ , полученные с учетом  $\sigma_{\text{сж}} = 970$  Н/мм<sup>2</sup> (для стали 45) и  $\sigma_{\text{сж}} = 3600$  Н/мм<sup>2</sup> (для стали Р6М5).

В табл. 3 приведены экспериментальные значения условного угла сдвига обрабатываемого материала  $\beta$  и рассчитанные по зависимости (6) значения условного напряжения "чистого" резания  $\sigma_{\text{рез}} = \sigma_{\text{сж}} / \tan \beta$ , отношений  $\sigma_{\text{рез}} / \sigma$  и  $\sigma_{\text{тр}} / \sigma$ , определяющих доли энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки, где  $\sigma_{\text{тр}} = \sigma - \sigma_{\text{рез}}$  – условное напряжение трения, Н/м<sup>2</sup>.

Как видно, доля энергии "чистого" резания меньше доли энергии трения, что указывает на необходимость дальнейшего совершенствования процессов механической обработки с точки зрения уменьшения энергоёмкости обработки. Основным путем снижения силовой напряженности процесса резания является уменьшение трения инструмента с обрабатываемым материалом, применяя для этого алмазные инструменты, обеспечивая ввод в зону резания дополнительной механической и электрической энергии, интенсифицирующей процесс резания, и т.д.

Как следует из табл. 2 и табл. 3, при обработке стали 45 отношения  $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$  и  $\sigma_{\text{рез}} / \sigma$  меньше, чем при обработке стали Р6М5 в связи с большей долей энергии трения в общей энергоёмкости процесса резания [5, 6]. Таким образом показано, что применение условного напряжения резания  $\sigma$  в качестве основного параметра резания позволяет раздельно учесть параметры процессов "чистого" резания и трения, определить доли "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса резания.

Таблица 2 – Экспериментальные значения  $P_z$  и расчетные значения параметров  $\sigma$  и  $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$

| V, м/мин                      | 25    | 50    | 75    | 100   | 125   | 150   | 200   | 250   |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Сталь 45                      |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $P_z$ , Н                     | 100   | 135   | 140   | 138   | 125   | 122   | 120   | 105   |
| $\sigma$ , Н/мм <sup>2</sup>  | 7143  | 9643  | 10000 | 9857  | 8929  | 8714  | 8571  | 7500  |
| $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$ | 0,136 | 0,1   | 0,097 | 0,098 | 0,109 | 0,111 | 0,113 | 0,13  |
| Сталь Р6М5                    |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $P_z$ , Н                     | 225   | 210   | 200   | 190   | 185   | 180   | 178   | 175   |
| $\sigma$ , Н/мм <sup>2</sup>  | 16071 | 15000 | 14286 | 13571 | 13214 | 12857 | 12714 | 12500 |
| $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$ | 0,224 | 0,24  | 0,252 | 0,265 | 0,272 | 0,28  | 0,283 | 0,288 |

Таблица 3 – Экспериментальные значения  $\beta$  и расчетные значения параметров  $\sigma_{\text{рез}}$ ,  $\sigma_{\text{рез}} / \sigma$  и  $\sigma_{\text{тр}} / \sigma$

| V, м/мин                                  | 50     | 100    | 150  | 200    | 250    | 300  |
|-------------------------------------------|--------|--------|------|--------|--------|------|
| Сталь 45                                  |        |        |      |        |        |      |
| $\beta$ , град                            | 17     | 17     | 19   | 20,5   | 21,5   | 22   |
| $\sigma_{\text{рез}}$ , Н/мм <sup>2</sup> | 3129   | 3129   | 2853 | 2621,6 | 2487,2 | 2425 |
| $\sigma_{\text{рез}} / \sigma$ , %        | 32,5   | 31,8   | 32,7 | 30,6   | 33,2   | 32,9 |
| $\sigma_{\text{тр}} / \sigma$ , %         | 67,5   | 68,2   | 67,3 | 69,4   | 66,8   | 67,1 |
| Сталь Р6М5                                |        |        |      |        |        |      |
| $\beta$ , град                            | 30     | 35     | 38,5 | 40     | 40,5   | 40,5 |
| $\sigma_{\text{рез}}$ , Н/мм <sup>2</sup> | 6234,8 | 5142,9 | 4557 | 4290,8 | 4210,5 | 4212 |
| $\sigma_{\text{рез}} / \sigma$ , %        | 41,6   | 37,9   | 35,4 | 33,8   | 33,7   | 33,7 |
| $\sigma_{\text{тр}} / \sigma$ , %         | 58,4   | 62,1   | 64,6 | 66,2   | 66,3   | 66,3 |

Полученные теоретические решения справедливы при условии достижения в условной плоскости сдвига материала ОА (рис. 1) максимального касательного напряжения  $\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{сдв}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{сж}}$  и, соответственно, условного угла сдвига обрабатываемого материала  $\beta$  согласно зависимости (3). Однако, исходя из этой зависимости, условие  $\tau = \tau_{\text{сдв}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{сж}}$  можно выполнить и при меньшем значении угла  $\beta$ :

$$\sin(\psi + 2\beta) = \frac{\sigma_{\text{сж}}}{\sigma} \cdot \cos \psi + \sin \psi. \quad (7)$$

Зависимость (7) можно упростить, преобразуя уравнение (2) к виду:

$$\sigma \cdot (1 - f \cdot \tan \beta) = \frac{\sigma_{\text{сж}}}{\sin 2\beta}. \quad (8)$$

Принимая в первом приближении  $(1 - f \cdot \operatorname{tg} \beta) \rightarrow 1$ , имеем:

$$\sin 2\beta = \frac{\sigma_{сж}}{\sigma}. \quad (9)$$

Как видно, угол  $\beta$  тем больше, чем меньше условное напряжение резания  $\sigma$ . В табл. 4 приведены рассчитанные по зависимости (7) значения угла  $\beta$  для разных значений угла  $\psi$ , а также значения угла  $\beta$ , рассчитанные по упрощенной зависимости (9). Из табл. 4 следует, что угол  $\psi$  мало влияет на изменение угла  $\beta$  (особенно для  $\sigma_{сж} / \sigma \leq 0,5$ ), а расхождение значений угла  $\beta$ , рассчитанных по зависимостям (7) и (9), незначительно. Поэтому расчеты угла  $\beta$  можно производить по зависимости (9). Кроме того, значения угла  $\beta$ , рассчитанные по зависимостям (7) и (9), меньше аналогичных значений угла  $\beta$ , рассчитанных по зависимости (6), табл. 1.

Необходимо отметить, что предложенный в работе теоретический подход к определению параметров механической обработки соответствует приведенному в работе [4] подходу, основанному на условии равновесия сил, действующих в плоскости сдвига материала ОА (рис. 1):

$$P_z \cdot \cos \beta = P_y \cdot \sin \beta + P. \quad (10)$$

Как видно, уравнение (10) идентично уравнению (2), что свидетельствует о достоверности приведенных в настоящей работе теоретических решений.

Таблица 4 – Расчётные значения условного угла сдвига  $\beta$  обрабатываемого материала

| $\sigma_{сж} / \sigma$                  | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4  | 0,5  | 0,6  |
|-----------------------------------------|-----|-----|-----|------|------|------|
| $\beta$ , (для $\psi = 17^\circ$ )      | 3   | 6   | 9   | 12,5 | 17   | 21,5 |
| $\beta$ , град (для $\psi = 22^\circ$ ) | 3   | 6   | 9,5 | 13   | 17,5 | 23,5 |
| $\beta$ , град (для $\psi = 27^\circ$ ) | 3   | 6   | 9,5 | 13,5 | 18,5 | 27   |
| $\beta$ , град, по зависимости (9)      | 3   | 6   | 9   | 12   | 15   | 18,5 |

**Перспективы дальнейших исследований.** Автор считает перспективными пути исследования, связанные с оценкой долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процессов лезвийной и абразивной обработки и на этой основе установление условий уменьшения силовой напряженности процесса резания.

**Выводы.** В работе получены аналитические зависимости для определения параметров механической обработки с позиции закона сохранения энергии. Показана определяющая роль условного напряжения резания в формировании параметров силовой напряженности процесса резания. Установлено, что условное напряжение резания при лезвийной обработке до 10 раз и более превышает предел прочности на сжатие обрабатываемого материала, поскольку основную часть энергетического баланса процесса составляет энергия трения инструмента с обрабатываемым материалом. В связи с этим произведена раздельная оценка долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки и определены условия уменьшения энергоёмкости. Показано, что условный угол сдвига обрабатываемого материала вполне однозначно определяется отношением предела прочности на сжатие обрабатываемого материала и условного напряжения резания.

#### Список литературы

1. Силин С. С. Метод подобия при резании материалов. – М. : Машиностроение, 1979. – 152 с.
2. Лоладзе Т. Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента. – М. : Машиностроение, 1982. – 320 с.
3. Бобров В. Ф. Основы теории резания металлов. – М. : Машиностроение, 1975. – 343 с.
4. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения / Под общ. ред. Ф. В. Новикова и А. В. Якимова. В десяти томах. Т. 1. "Механика резания материалов". – Одесса : ОНПУ, 2002. – 580 с.
5. Новиков Ф. В. Основы математического моделирования технологических процессов механической обработки : монография. – Днепр : ЛИРА, 2018. – 400 с.
6. Полянський В. І. Розширення технологічних можливостей підвищення точності механічної обробки отворів // Перспективні технології та прилади : Збірник наукових праць. – Луцьк : Луцький НТУ, 2017. – № 11 (2). – С. 87 – 92.

#### References (transliterated)

1. Silin S. S. *Metod podobiya pri rezanii materialov* [The method of similarity when cutting materials]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1979. 152 p.
2. Loladze T. N. *Prochnost' i iznosostoykost' rezhushhego instrumenta* [Strength and wear resistance of the cutting tool]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1982. 320 p.
3. Bobrov V. F. *Osnovy teorii rezaniya metallov* [Fundamentals of the theory of metal cutting]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1975. 343 p.
4. *Fiziko-matematicheskaya teoriya protsessov obrabotki materialov i tekhnologii mashinostroyeniya V desyati tomakh. Tom. 1. "Mekhanika rezaniya materialov"* [Physical and mathematical theory of material processing theory and mechanical engineering technologies. In ten volumes. V. 1. "Mechanics of metal cutting"]. Ed. F. V. Novikov, A. V. Yakimov. Odessa, ONPU Publ., 2002. 580 p.
5. Novikov F. V. *Osnovy matematicheskogo modelirovaniya tekhnologicheskikh protsessov mekhanicheskoy obrabotki : monografiya* [Fundamentals of Mathematical Modeling of Technological Processes of Mechanical Processing : monograph]. Dnepr, LIRA Publ., 2018. 400 p.
6. Polyanskiy V. I. *Rasshirenie tekhnologicheskikh vozmozhnostey povysheniya tochnosti mekhanicheskoy obrabotki otverstiy* [Expansion of technological capabilities to improve the accuracy of machining holes]. *Perspektivni tekhnologiyi ta prylady : Zbirnyk naukovykh prats'* [Perspective technologies and devices: Collection of scientific works]. Lutsk, Luts'kyi NTU Publ., 2017, no. 11 (2), pp. 87–92.

Поступила (received) 16.04.2019

**Новіков Федір Васильович (Новиков Федор Васильевич, Novikov Fedir Vasylovych)** – доктор технічних наук, професор, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків; тел.: (0572) 69-55-62; e-mail: novikovfv@i.ua.

**Полянський Володимир Іванович (Полянский Владимир Иванович, Polyansky Vladimir Ivanovich)** – кандидат технічних наук, Генеральний директор, ТОВ «Імперія металів», м. Харків; тел.: (067) 578-09-06; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

УДК 534.1:539.3

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ**

## **ПОРІВНЯННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СИЛИ УДАРУ ТІЛ В ТЕОРІЇ ГЕРЦА**

Проведено порівняльний аналіз наближених аналітичних розв'язків інтегрального рівняння сили удару пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку в області їх взаємодії. Для порівняння використано як відомі розв'язки, так і нові, побудовані методом послідовних наближень. Завдяки наближеному обчисленню сум повільно збіжних функціональних рядів способом Шенкса, вдалося одержати компактну форму розв'язку, відносна похибка якого менше одного відсотка. Для оцінки похибок було використано результати числового інтегрування диференціального рівняння удару на комп'ютері. Показано, що одержані наближені аналітичні розв'язки можна використовувати і для апроксимації деяких періодичних Ateb-функцій.

**Ключові слова:** теорія Герца, сила удару, інтегральне рівняння, аналітичні розв'язки, метод Шенкса, апроксимація Ateb-функцій.

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**

## **СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЫ УДАРА ТЕЛ В ТЕОРИИ ГЕРЦА**

Проведен сравнительный анализ приближённых аналитических решений интегрального уравнения силы удара упругих тел, ограниченных поверхностями второго порядка в области их взаимодействия. Для сравнения использованы как известные решения, так и новые, построенные методом последовательных приближений. Благодаря приближённому суммированию медленно сходящихся функциональных рядов способом Шенкса, удалось получить компактную форму решения, относительная погрешность которого меньше одного процента. Для установления погрешностей были использованы результаты численного интегрирования дифференциального уравнения удара на компьютере. Показано, что полученные приближённые аналитические решения можно использовать и для аппроксимации некоторых периодических Ateb-функций.

**Ключевые слова:** теория Герца, сила удара, интегральное уравнение, аналитические решения, метод Шенкса, аппроксимация Ateb-функций.

**V. P. OLSHANSKIY**

## **COMPARISON OF APPROXIMATE SOLUTIONS TO IMPACT STRENGTH INTEGRAL EQUATION IN THE FRAMEWORK OF HERTZ THEORY**

Analytical solutions to the integral equation describing the strength of impact of elastic bodies bounded by second order surfaces in the area of the impact were compared. Previously known solutions to the integral equation as well the new ones, constructed by the method of successive approximations, were considered. Approximate summation of slowly converging functional series by Shanks's method allowed to derive a compact form of the solution which relative error is less than one percent. The errors were computed by using the results of numerical integration of the impact differential equation. It was shown that the analytical solutions obtained could also be applied for approximating some periodic Ateb-functions.

**Key words:** Hertz theory, strength of impact, integral equation, analytical solution, Shanks's method, approximation of Ateb-functions.

**Вступ.** При обчисленні сили ударної взаємодії пружних тіл, як функції часу, традиційно використовують інтегральні рівняння. Першим, хто склав таке рівняння сили удару був *С. П. Тимошенко* [1, 2]. В подальшому інтегральні рівняння такого типу використовували в багатьох публікаціях, як в задачах удару [3 – 6], так і в інших задачах механіки [7 – 9]. Їх розв'язки одержували чисельними методами. Для цього проміжок інтегрування розділяли на малі ділянки і на кожній з них певним чином апроксимували силу удару. Найбільш поширеним є спосіб *ступінчастої апроксимації*, де як і в роботі [1], силу вважали сталою в межах ділянки. Використання *лінійної апроксимації* дозволило *А. П. Філіпову* [4] прискорити збіжність рядів і обчислити не тільки прогини, а і напруження в балках і пластинах, спричинені пружним ударом.

Значно менше публікацій присвячено побудові наближених аналітичних розв'язків інтегральних рівнянь. Такі спроби зроблено в [10, 11]. У випадку удару двох пружних тіл, без урахування їх коливань, *компактний аналітичний розв'язок* вдалося побудувати *М. О. Кільчевському* [11] для випадку, коли незакріплені тіла, піддані удару, обмежені в області контакту поверхнями другого порядку. Саме його розв'язок будемо далі використовувати для порівняння з тими, що одержано в цій роботі.

**Метою даної статті** є побудова наближених аналітичних розв'язків інтегрального рівняння сили удару двох незакріплених пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку, аналіз їх точності та можливостей використання в інженерних розрахунках ударних процесів.

**Інтегральне рівняння сили удару.** Якщо тіла в області динамічної взаємодії обмежені поверхнями:  $z_1 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2$ ;  $z_2 = -(b_{11}x^2 + b_{22}y^2)$ , причому  $A = a_{11} + b_{11} \geq B = a_{22} + b_{22}$ , то, у відповідності з теорією Герца, зближення центрів мас тіл  $x$ , під дією сили  $P$ , становить:

$$x = k \cdot P^{2/3}.$$

Для обчислення  $k$  використовують розв'язок статичної контактної задачі теорії пружності, згідно якому [12]:

$$k = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{\pi b_1} K(\varepsilon).$$

Тут:

$$Q_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}; \quad Q_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}; \quad b_1 = \sqrt[3]{\frac{3E(\varepsilon)}{2(1 - \varepsilon^2)} \frac{Q_1 + Q_2}{\pi(A + B)}},$$

де  $K(\varepsilon)$ ,  $E(\varepsilon)$  – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду, відповідно;  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл.

Параметр  $\varepsilon$  – ексцентриситет площадки контакту – є коренем трансцендентного рівняння:

$$(1 - \varepsilon^2) \left[ \frac{K(\varepsilon)}{E(\varepsilon)} - 1 \right] = \frac{B\varepsilon^2}{A + B},$$

тобто він залежить лише від геометрії граничних поверхонь тіл (коефіцієнтів  $A$  і  $B$ ).

В рамках припущень квазістатичної теорії удару Герца інтегральне рівняння сили динамічного стискання тіл має вигляд [11]:

$$kP^{2/3} = v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1, \quad (1)$$

де  $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  – маси тіл, задіяних в ударі;  $v_0$  – початкова швидкість зіткнення тіл;  $t$  – час;  $P = P(t)$  – сила удару.

Введенням в роботі [11] нових змінних:

$$P(t) = \left( \frac{M v_0}{k} \right)^{3/5} \cdot f(\tau), \quad t = \frac{M^{2/5} k^{3/5}}{v_0^{1/5}} \tau, \quad (2)$$

рівнянню (1) надано наступну форму:

$$f^{2/3}(\tau) + \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 - \tau = 0, \quad (3)$$

куди явно не входять фізичні та геометричні параметри тіл. Тому автор монографії [11] називає (3) *універсальним рівнянням удару*. Про його наближені розв'язки піде мова далі.

**Наближені розв'язки універсального рівняння удару.** Як відзначалось вище, вперше такий розв'язок побудовано в [11]. Він має вигляд:

$$f(\tau) = -\frac{10\tau^{3/2}}{13,793 + 0,73\tau^{5/2}} \cdot \frac{0,015\tau^{5/2} - 0,276}{0,2 + 0,013\tau^{5/2}}. \quad (4)$$

Громізка процедура його отримання детально викладена в [11] і її тут повторювати не будемо.

Щоб мати форми наближених розв'язків, замість (3), використаємо ітераційне співвідношення:

$$f_n(\tau) = \left( \tau - \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} f_{n-1}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right)^{3/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Поклавши в ньому  $f_0(\tau) = 0$ , одержуємо:

$$f_1(\tau) = \tau^{3/2}; \quad f_2(\tau) = \left( \tau - \frac{4}{35} \tau^{7/2} \right)^{3/2} \approx \tau^{3/2} - \frac{6}{35} \tau^4 + \frac{6}{1225} \tau^{13/2} + \frac{4}{42875} \tau^9. \quad (6)$$

Тут прийняли до уваги, що на етапі динамічного стискання тіл  $\tau \in (0; \tau_c)$ , де  $\tau_c \approx 1,60904$ .

Підставивши (6) в (5), одержуємо наступний розв'язок:



$$f(\tau) \approx f_3(\tau) \approx \left( \tau - \frac{4}{35} \tau^{7/2} + \frac{1}{175} \tau^6 - \frac{8}{104125} \tau^{17/2} - \frac{2}{2358125} \tau^{11} \right)^{3/2}. \quad (7)$$

Щоб мати замість (7) більш компактний вираз  $f(\tau)$ , аналогічно [11], скористаємося методом Шенкса. За цим методом сума ряду  $S$  наближено подається співвідношенням:

$$S \approx \frac{S_{n-1} \cdot S_{n+1} - S_n^2}{S_{n+1} - S_{n-1}}, \quad (8)$$

де  $S_{n-1}$ ,  $S_n$ ,  $S_{n+1}$  – суми з  $(n-1)$ ,  $n$  і  $(n+1)$  членів ряду, відповідно.

Оскільки  $S_{n-1} = S_n - a_n$ ,  $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ , то:

$$S_{n-1} \cdot S_{n+1} - S_n^2 = S_n(a_{n+1} - a_n) - a_n a_{n+1}; \quad S_{n+1} + S_{n-1} = 2S_n + a_{n+1} - a_n.$$

Тут  $a_n$  і  $a_{n+1}$  –  $n$ -й і  $(n+1)$ -й члени ряду, відповідно.

Отже, (8) зводиться до формули:

$$S \approx S_n - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}. \quad (9)$$

Розглянемо ряд:

$$S = 1 - \frac{4}{35} \tau^{5/2} + \frac{1}{175} \tau^5 - \frac{8}{104125} \tau^{15/2} - \dots$$

Покладемо в ньому:  $S_n = 1 - \frac{4}{35} \tau^{5/2}$ ;  $a_n = -\frac{4}{35} \tau^{5/2}$ ;  $a_{n+1} = \frac{1}{175} \tau^5$ .

Підстановкою цих виразів в (9) отримуємо:

$$S \approx 1 - \frac{4}{35} \tau^{5/2} + \frac{4}{35} \frac{\tau^5}{20 + \tau^{5/2}} = 1 - \frac{16}{7} \frac{\tau^{5/2}}{20 + \tau^{5/2}}.$$

Тоді:

$$f(\tau) \approx (\tau \cdot S)^{3/2} \approx \left( \tau - \frac{16}{7} \frac{\tau^{7/2}}{20 + \tau^{5/2}} \right)^{3/2}. \quad (10)$$

Ця форма розв'язку значно компактніша, ніж (7).

Щоб використати наближені розв'язки для розрахунку характеристик удару, прийнемо до уваги, що максимум сили стискання  $P_c$  і максимум зближення центрів мас тіл  $x_c$  подаються формулами (11):

$$P_c = \left( \frac{5}{4} \right)^{3/5} \left( \frac{M v_0^2}{k} \right)^{3/5}; \quad x_c = k \left( \frac{5}{4} \right)^{2/5} \left( \frac{M v_0^2}{k} \right)^{2/5}, \quad (11)$$

де згідно з (2):  $\left( \frac{M v_0^2}{k} \right)^{3/5} = \frac{P(t)}{f(\tau)}$ .

Тоді у безрозмірній формі:

$$\frac{P(t)}{P_c} = \left( \frac{4}{5} \right)^{3/5} \cdot f(\tau); \quad \frac{x(t)}{x_c} = \left( \frac{4}{5} \right)^{2/5} (f(\tau))^{2/3}, \quad (12)$$

причому  $\tau = \left( \frac{5}{4} \right)^{2/5} \frac{v_0 t}{x_c}$ .

Підставляючи в формули (12) розв'язки (4), (7) і (10), будемо мати різні значення характеристик удару тіл на етапі їх стискання.

На етапі розтискання, що проходить на проміжку  $\tau \in [\tau_c, \tau_y]$ , де  $\tau_y = 3,21808$ , зберігає чинність лише розв'язок (4). У виразах (7) і (10) треба змінити  $\tau$  на  $\tau_y - \tau$ , тоді при  $\tau = \tau_y$ :  $x(\tau) = 0$  і  $P(\tau) = 0$ , що настає в кінці удару.

В роботі [13] встановлено, що:

$$\frac{x(t)}{x_c} = Sa \left( \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{v_0 t}{x_c} \right), \quad (13)$$

тобто вказане відношення дорівнює *Ateb-сінусу*.

Тому, використовуючи надруковану в [13] таблицю цієї функції, скористаємося можливістю з'ясувати по-

хибки наближених розв'язків (4), (7) і (10), бо згідно з (12) і (13), маємо:

$$Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{v_0 t}{x_c}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2/5} (f(\tau))^{2/3}. \quad (14)$$

Результати обчислень значень вказаної функції чотирма способами наведено в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення Ateb-сінуса для різних  $\eta = \left(\frac{4}{5}\right)^{2/5} \cdot \tau$

| $\eta$  | Значення $Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right)$ |                     |                      |                |
|---------|-------------------------------------------------------------|---------------------|----------------------|----------------|
|         | Формули: (4) і (14)                                         | Формули: (7) і (14) | Формули: (10) і (14) | Таблиця в [13] |
| 0,2     | 0,200                                                       | 0,199               | 0,199                | 0,199          |
| 0,4     | 0,394                                                       | 0,394               | 0,394                | 0,394          |
| 0,6     | 0,577                                                       | 0,577               | 0,577                | 0,577          |
| 0,8     | 0,738                                                       | 0,737               | 0,737                | 0,737          |
| 1,0     | 0,868                                                       | 0,866               | 0,866                | 0,866          |
| 1,2     | 0,961                                                       | 0,956               | 0,954                | 0,954          |
| 1,47164 | 1,020                                                       | 1,006               | 0,997                | 1,000          |

Як бачимо, тут кращим наближенням є компактна формула (10). Її максимальна похибка становить 0,3 %. Розв'язок (4) дає дещо завищені результати з похибкою 2 %.

Використовуючи розв'язок (10), отримуємо наступну формулу апроксимації Ateb-сінуса в першій чверті його періоду  $\eta \in [0; I]$ :

$$Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right) \approx \eta - 2,2857 \frac{\eta^{7/2}}{16 + \eta^{5/2}}, \quad (15)$$

де  $I = 1,47164$ .

По аналогії з (15), для апроксимації Ateb-косінуса в першій чверті його періоду одержуємо вираз:

$$Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right) \approx I - \eta - \frac{2,2857(I - \eta)^{7/2}}{16 + (I - \eta)^{5/2}}. \quad (16)$$

Інформація про похибки цієї формули надана в табл. 2, де, крім значень, обчислених за допомогою (16), вказано табличні значення, які запозичено з роботи [14].

Таблиця 2 – Значення Ateb-косінуса

| $\eta$ | Значення $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right)$ |                | $\eta$  | Значення $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right)$ |                |
|--------|-------------------------------------------------------------|----------------|---------|-------------------------------------------------------------|----------------|
|        | Формула (16)                                                | Таблиця з [14] |         | Формула (16)                                                | Таблиця з [14] |
| 0,0    | 0,997                                                       | 1,000          | 0,8     | 0,637                                                       | 0,637          |
| 0,2    | 0,974                                                       | 0,975          | 1,0     | 0,461                                                       | 0,461          |
| 0,4    | 0,902                                                       | 0,902          | 1,2     | 0,270                                                       | 0,270          |
| 0,6    | 0,787                                                       | 0,787          | 1,47164 | 0,000                                                       | 0,000          |

Найбільша відносна похибка апроксимації (16) становить 0,3 %.

Таким чином, наближення (15), (16) цілком придатні для обчислення значень Ateb-функцій в інженерних розрахунках.

Проілюструємо на конкретному прикладі використання формули (10).

**Приклад.** Проведемо розрахунок зміни у часі сили удару двох сталевих куль однакового радіуса  $R = 0,05$  м зі швидкістю  $v_0 = 4$  м/с. Для вказаного матеріалу куль  $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\mu_1 = \mu_2 = 0,25$ . Геометричні параметри:  $a_{11} = b_{11} = a_{22} = b_{22} = 10$  м<sup>-1</sup>,  $A = B = 20$  м<sup>-1</sup>. Ексцентриситет кругової площадки контакту  $\varepsilon = 0$  і, в такому випадку,  $K(\varepsilon) = E(\varepsilon) = \pi/2$ . Фізичні сталі  $Q_1 = Q_2 = 4,6875 \cdot 10^{-12}$  Па<sup>-1</sup>. Параметр  $b_1 = 5,601859 \cdot 10^{-5}$  (м/Па)<sup>1/3</sup>. Йому відповідає  $k = 1,25518 \cdot 10^{-7}$  мН<sup>-2/3</sup>. Маса кожної кулі  $m_1 = m_2 = 4,08407$  кг. Їх зведена маса становить  $M = 2,04204$  кг. Розрахунки за формулами (11) дають:  $P_c = 128065,7325$  Н;  $x_c = 0,0003189$  м. Обчислені відношення  $P(t)/P_c$  для різних  $t$  за формулами (10), (12) записано в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення  $P(t)/P_c$ , обчислені двома способами

| $\frac{v_0 t}{x_c}$ | Значення $P(t)/P_c$ |              | $\frac{v_0 t}{x_c}$ | Значення $P(t)/P_c$ |              |
|---------------------|---------------------|--------------|---------------------|---------------------|--------------|
|                     | Формули (10), (12)  | Числов. інт. |                     | Формули (10), (12)  | Числов. інт. |
| 0,2                 | 0,0891              | 0,0891       | 1,0                 | 0,8053              | 0,8055       |
| 0,4                 | 0,2476              | 0,2476       | 1,2                 | 0,9316              | 0,9324       |
| 0,6                 | 0,4377              | 0,4377       | 1,4                 | 0,9924              | 0,9952       |
| 0,8                 | 0,6325              | 0,6325       | I                   | 0,9958              | 1,0000       |

Для порівняння, тут також записано відношення  $P(t)/P_c$ , одержані чисельним методом. Враховуючи, що, згідно з (12):

$$P(t)/P_c = (x(t)/x_c)^{3/2},$$

на комп'ютері проводимо чисельне інтегрування диференціального рівняння:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{Mk^{3/2}} x^{3/2},$$

при початкових умовах:  $x(0) = 0$ ,  $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0$  і вказаних вище значеннях:  $M, k, v_0$ .

Маємо невелику розбіжність відповідних числових результатів в табл. 3, що підтверджує вірогідність отриманих аналітичних розв'язків.

**Перспективи подальших досліджень.** Викладений метод може бути поширеним на випадки удару тіл, обмежених поверхнями і більш високих порядків, а також поверхнями, що мають сингулярні точки, але це потребує складання нових інтегральних рівнянь і побудови їх конкретних аналітичних розв'язків.

**Висновки.** В рамках теорії Герца, методом послідовних наближень, з використанням формули Шенкса побудовано компактний наближений аналітичний розв'язок інтегрального рівняння сили удару двох незакріплених пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку в області їх взаємодії. Цей розв'язок має вищу точність, ніж відомі в літературі. Він служить також гарним наближенням періодичних Ateb-функцій в першій чверті їх періоду.

#### Список літератури

1. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М. – Л.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
3. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Гостройиздат, 1965. – 447 с.
4. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
5. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 340 с.
6. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков: Мискидрук, 2012. – 320 с.
7. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на упруго-деформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с.
8. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Вороний А. В., Шараната А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
9. Вороний А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. – Харьков: Лидер, 2018. – 214 с.
10. Петренко М. П. Про наближений розв'язок уточненого функціонального рівняння теорії удару // Прикладна механіка. – 1961. – Т. 7. – № 5. – С. 565 – 568.
11. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твёрдых тел. Удар. – Киев: Наукова думка, 1976. – 319 с.
12. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – М. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
13. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Ateb-синус у розв'язку задачі Герца про удар // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2018. – № 3 (1279). – С. 98 – 103.
14. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Динаміка осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при дії силового імпульсу // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХП», 2018. – № 33 (1309). – С. 37 – 42.

#### References (transliterated)

1. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibrations in Engineering Practice]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 472 p.
2. Timoshenko S. P. *Steganoalgoritmy Kolebaniya v inzhenernom dele* [Steganography algorithm in engineering practice]. Moscow – Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1959. 439 p.
3. Gol'dsmit V. *Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemykh tel* [Impact. Theory and physical properties of impacted bodies]. Moscow, Gostroyizdat Publ., 1965. 447 p.
4. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruemykh sistem* [Vibrations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 734 p.
5. Goloskokov E. G., Filippov A. P. *Nestatsionarnye kolebaniya deformituemykh sistem* [Non-stationary vibrations of deformable systems]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1977. 340 p.
6. Olshanskiy V. P., Tishchenko L. N., Olshanskiy S. V. *Kolebaniya sterzhney i plastin pri mekhanicheskom udare* [Oscillations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Urban printing Publ., 2012. 320 p.
7. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V. *Impul'snye vozdeystviya na uprugodeformiruemye eylementy konstruktsey* [Pulse impact on elastically deformable structural units]. Kharkov, Izd-vo KhGADTU (KhADI) Publ., 2001. 184 p.

8. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruksiy* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.
9. Voropay A. V. *Integral'nye uravneniya Vol'terra v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnogo deformirovaniya plastin* [Volterra integral equations in some problems of non-stationary deformation of plates]. Kharkov, Lider Publ., 2018. 214 p.
10. Petrenko M. P. Pro nablyzheny rozv'yazok utochnenogo funktsional'nogo rivnyannya teorii udaru [On approximate solution to specified functional equation of impact theory]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 1961, vol. 7, no. 5, pp. 565–568.
11. Kil'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktne szgatie tveyrdykh tel. Udar* [Dynamic contact compression of solid. Impact]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1976. 319 p.
12. Shtaerman I. Ya. *Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti* [Contact problem of elasticity theory]. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 272 p.
13. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Ateb-synus u rozv'yazku zadachi Gertsas pro udar [Ateb-sine in the solution of Hertz's problem of impact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 98–103.
14. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. *Dynamika ostsilyatora z zhorstkoyu kharakterystykoyu pruzhnosti pry diyi sylovogo impul'su* [Dynamics of oscillator with stiff elasticity characteristic under force]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. 2018, no. 33 (1309), pp. 37–42.

Надійшла (received) 06.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, М. В. СЛІПЧЕНКО**

### **НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ НА ОДНОБІЧНІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ, СПРИЧИНЕНІ СИЛОВИМ ІМПУЛЬСОМ**

Розглянуто динамічне деформування прямокутної та круглої мембран, однобічно підкріплених двопараметричною пружною основою, що чинить опір лише стисканню, в умовах силового імпульсного навантаження. Показано, що внаслідок несиметрії характеристики пружності системи, після відриву та віддалення мембрани від основи її прогин може бути більший за той, що вона мала при контакті з основою за дії імпульсу. Визначено умови, коли можлива така нерівність. Вони пов'язані з натягом мембрани, пружними характеристиками основи і тривалістю дії прямокутного імпульсу, а величина динамічного тиску на мембрану не входить до цих умов, що є наслідком кусково-лінійної силової характеристики коливальної системи, поданої відрізками двох прямих. Наведено приклади розрахунків і проведено аналіз числових результатів.

**Ключові слова:** прямокутна і кругла мембрани, однобічна пружна основа, прямокутний силовий імпульс.

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, М. В. СЛИПЧЕНКО**

### **НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ НА ОДНОСТОРОННЕМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ВЫЗВАННЫЕ СИЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ**

Рассмотрено динамическое деформирование прямоугольной и круглой мембран, односторонне подкрепленных двухпараметрическим упругим основанием, которое сопротивляется только сжатию, в условиях силового импульсного нагружения. Показано, что в результате несимметрии характеристики упругости системы, после отрыва и отдаления мембраны от основания её прогиб может быть больше того, который она имела при контакте с основанием при действии импульса. Определены условия, когда возможно такое неравенство. Они связаны с натяжением мембраны, упругими характеристиками основания и продолжительностью действия прямоугольного импульса, а величина динамического давления на мембрану не входит в эти условия, что является следствием кусочно-линейной силовой характеристики колебательной системы, представленной отрезками двух прямых. Приведены примеры расчетов и проведен анализ числовых результатов.

**Ключевые слова:** прямоугольная и круглая мембраны, одностороннее упругое основание, прямоугольный силовой импульс.

**V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY, M. V. SLIPCHENKO**

### **NONSTATIONARY OSCILLATIONS OF THE MEMBRANE ON A ONE-SIDED ELASTIC BASE, CAUSED BY A FORCE IMPULSE**

Dynamic deformation of rectangular and round membranes unilaterally supported by a two-parameter elastic base, which resists only compression, under conditions of force impulse loading is considered. It is shown that as a result of asymmetry of the elasticity characteristics of the system, after separation and removal of the membrane from the base, its deflection may be larger than that which it had in contact with the base under the action of the impulse. Conditions are determined when such an inequality is possible. They are related to the membrane tension, the elastic characteristics of the base, and the duration of the rectangular pulse, that is, the value of the dynamic pressure on the membrane is not one of these conditions, which is the result of the piecewise-linear force characteristic of the oscillatory system given by segments of two straight lines. Examples of calculations are given and analysis of numerical results is carried out.

**Key words:** rectangular and round membranes, unilateral elastic base, rectangular force impulse.

**Вступ.** Динаміку мембран при дії короткочасних імпульсних навантажень розглядали в багатьох роботах, із яких виділимо [1 – 4]. У цих роботах, крім прямих задач розрахунку деформованого стану, розв’язували й обернені задачі по визначенню параметрів динамічних навантажень, які спричиняють зареєстровані (відомі) переміщення. Там також аналізували нестационарні коливання прямокутних і круглих мембран з зосередженими масами, в тому числі мембран підкріплених пружною основою. Але в названих роботах та інших відомих публікаціях розв’язували лінійні динамічні задачі. *Нелінійним задачам* приділено значно менше уваги, бо їх аналітичне розв’язання становить суттєві труднощі, за винятком окремих випадків. Один із таких випадків використано в цій роботі.

**Метою статті** є дослідження особливостей руху прямокутної та круглої мембран з відривом від основи при силовому імпульсному навантаженні.

**Постановка задачі та її розв’язок.** Для досягнення поставленої мети вибрано найпростіші варіанти розподілу тиску по поверхні мембрани та його зміну в часі. Такий вибір дав можливість побудувати точні аналітичні розв’язки рівнянь руху, провести їх припасовування та дослідити особливості динамічного процесу в нелінійній системі з несиметричною силовою характеристикою.

**Динаміка прямокутної мембрани.** Припускаємо, що мембрана має розміри  $l_1$  і  $l_2$  відповідно в напрямі координатних осей  $Ox$  і  $Oy$ . Її сталий натяг дорівнює  $T$ . Знизу вона підкріплена двопараметричною пружною основою, що має характеристики  $c_f$ ,  $t_f$  і  $\rho_f$  [5], а зверху навантажена динамічним тиском:

$$q(x, y, t) = q \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (1)$$

Тут  $q$  – максимальне значення тиску, що припадає на центр мембрани;  $H(t) - H(t - t_1)$  – *одиничні функції Хевісайда*;  $t$  – час;  $t_1$  – тривалість дії (ширина) прямокутного імпульсу.

Переміщення (прогини) мембрани  $z(x, y, t)$  донизу додатні, а доверху – від’ємні відносно положення статичної рівноваги  $z = 0$ . Їх описуємо диференціальним рівнянням:

$$-T_* \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + c_f z + \rho_* \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (2)$$

де  $T_* = T + 2t_f$ ;  $\rho_* = \rho + \rho_f$ ;  $\rho$  – маса одиниці площі мембрани;  $\rho_f$  – приєднана маса основи.

Рівняння (1) враховує контакт мембрани з основою і має чинність при  $z > 0$ .

Оскільки прогини закріпленої на контурі мембрани дорівнюють нулю, то розв’язок рівняння (2) подаємо добутком:

$$z(x, y, t) = B(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad (3)$$

у якому  $B(t)$  – невідома функція часу.

Підстановкою (3) в (2), з урахуванням (1), отримуємо:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \Omega^2 B = \frac{q}{\rho_*} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (4)$$

Тут  $\Omega = \sqrt{\frac{1}{\rho_*} \left[ T_* \left( \frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right) + c_f \right]}$  – частота вільних коливань мембрани при двобічному контакті з основою.

Розв’язок рівняння (4), при нульових початкових умовах, має вигляд [6]:

$$B(t) = \begin{cases} z_c (1 - \cos \Omega t), & t < t_1; \\ 2z_c \sin \frac{\Omega t_1}{2} \sin \left( \Omega \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right), & \text{при} \\ & t \geq t_1, \end{cases} \quad (5)$$

де  $z_c = \frac{q}{T_* \left( \frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right) + c_f}$  – прогин центру мембрани донизу при дії на її поверхні статичного тиску

$$q(x, y) = q \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}.$$

Якщо  $t_1 < \frac{2\pi}{\Omega}$ , то розв'язок (5) має сенс при  $t \in (0; t_*)$ , де:

$$t_* = \frac{\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2}.$$

У відповідності з (3), (5) амплітуда переміщення центру мембрани донизу  $a_0(t_1)$ , становить:

$$a_0(t_1) = \begin{cases} 2z_c \sin \frac{\Omega t_1}{2}, & \text{при } t_1 \leq \frac{\pi}{\Omega}; \\ 2z_c, & \text{при } t_1 > \frac{\pi}{\Omega}. \end{cases} \quad (6)$$

Прогин  $a_0(t_1)$  мембрана має при:

$$t_e = \frac{2\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2},$$

коли  $t_1 \leq \pi/\Omega$  і при  $t_e = \pi/\Omega$ , коли  $t_1 > \pi/\Omega$ .

Контакт мембрани з основою порушується в момент часу:

$$t = t_* = \frac{\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2},$$

бо, згідно з (5),  $B(t_*) = 0$ . При цьому центр мембрани має швидкість

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{t=t_*} = -v_0 = -2z_c \Omega \sin \frac{\Omega t_1}{2}. \quad (7)$$

Далі рух центру мембрани описується рівнянням:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \omega^2 B = 0, \quad (8)$$

у якому  $\omega = \sqrt{\frac{1}{\rho} T \left( \frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right)}$  – частота коливань мембрани при відсутності основи.

Розв'язок рівняння (8), що задовольняє умові (7), має вигляд:

$$B(t) = -2z_c \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2} \sin(\omega(t - t_*)). \quad (9)$$

Амплітуда переміщення центру мембрани вгору  $a_1(t_1)$ , згідно з (3), (9), дорівнює:

$$a_1(t_1) = 2z_c \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2} \quad (10)$$

і досягається вона в момент часу:

$$t = t_m = \frac{2\pi}{\Omega} + t_*.$$

Отже, якщо  $t_1 \leq \pi/\Omega$ , то відношення амплітуд, визначених формулами (6), (10), наступне:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{\Omega}{\omega} = \text{const}.$$

При більших тривалостях імпульсу, коли  $t_1 \in (\pi/\Omega; 2\pi/\Omega)$ ,  $a_0(t_1) = 2z_c$  і

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2}.$$

Таким чином, при  $\Omega > \omega$  виконується нерівність  $a_1(t_1) > a_0(t_1)$ , тобто має місце динамічний ефект несиметрії силової характеристики системи [8, 9]. Він проявляється лише для тривалостей імпульсу  $t_1 \in (0; t_f)$ , де:

$$t_f = \frac{2}{\Omega} \left( \pi - \arcsin \frac{\omega}{\Omega} \right).$$

У випадку  $\Omega < \omega$  названий ефект не проявляється, бо маємо  $a_0(t_1) > a_1(t_1)$ .

Оскільки в вирази  $\Omega$  і  $\omega$  не входить параметр  $q$ , то відношення  $a_1(t_1)/a_0(t_1)$  не залежить від максимального тиску на мембрану, що є наслідком кусково-лінійної характеристики пружності системи.

**Приклад 1.** Припустимо, що сталевая мембрана товщиною  $1,5 \cdot 10^{-3}$  м:  $T = 2,34 \cdot 10^5$  Н/м;  $\rho = 11,7$  кг/м<sup>2</sup>;

$l_1 = l_2 = 1$  м і лежить на пружному шарі гуми, у якої  $E_0 = 4 \cdot 10^6$  Па;  $\nu_0 = 0,48$ ;  $\rho_0 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>, товщиною  $H = 0,08$  м. Максимальний тиск на мембрану  $q = 2 \cdot 10^5$  Па. Обчислимо її максимальні прогини при різних тривалостях дії імпульсу  $t_1$ .

Для розрахунку значень коефіцієнтів  $c_f$ ,  $t_f$ ,  $\rho_f$  маємо інтеграли [5]:

$$c_f = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \int_0^H \left[ \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right]^2 d\xi; \quad t_f = \frac{E_0}{4(1+\nu_0)} \int_0^H \psi^2(\xi) d\xi; \quad \rho_f = \rho_0 \int_0^H \psi^2(\xi) d\xi,$$

в яких  $\psi(\xi)$  – функція розподілу вертикальних переміщень по товщині шару.

Враховуючи невелику товщину шару, задаємо наближено:

$$\psi(\xi) = \frac{H-\xi}{H}.$$

$$\text{Тоді: } c_f = \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)} = 6,4969 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3; \quad t_f = \frac{E_0 H}{12(1+\nu_0)} = 18018 \text{ Н/м}; \quad \rho_f = \frac{\rho_0 H}{3} = 32 \rho_0 \text{ кг/м}^2.$$

Подальші обчислення дають:  $T_* = 270036$  Н/м;  $\rho_* = 43,7$  кг/м<sup>2</sup>;  $\Omega = 1268,3373$  с<sup>-1</sup>;  $z_c = 0,002845$  м;  $\omega = 628,3185$  с<sup>-1</sup>;  $t_r = 0,004136$  с.

Одержані для різних  $t_1$  значення  $a_0(t_1)$  і  $a_1(t_1)$  записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення амплітуд прогинів і час їх досягнення при різних  $t_1$

| $10^3 t_1, \text{ с}$ | $10^3 a_0(t_1), \text{ м}$ | $10^3 a_1(t_1), \text{ м}$ | $10^3 t_e, \text{ с}$ | $10^3 t_m, \text{ с}$ |
|-----------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1,000                 | 3,371                      | 6,805                      | 1,738                 | 5,477                 |
| 2,000                 | 5,432                      | 10,965                     | 2,238                 | 9,977                 |
| 2,477                 | 5,690                      | 11,486                     | 2,477                 | 6,215                 |
| 3,000                 | 5,690                      | 10,860                     | 2,477                 | 6,477                 |
| 4,000                 | 5,690                      | 6,532                      | 2,477                 | 6,977                 |
| 4,800                 | 5,690                      | 1,119                      | 2,477                 | 7,377                 |

Розрахунки підтверджують, що при  $t_1 < t_r$   $a_1(t_1) > a_0(t_1)$ , а при  $t > t_r$  навпаки  $a_1(t_1) < a_0(t_1)$ .

На рис. 1 нанесено графіки  $B(t)$ , одержані числовим інтегруванням на комп'ютері диференціальних рівнянь (4) і (8) для трьох значень  $t_1$ .

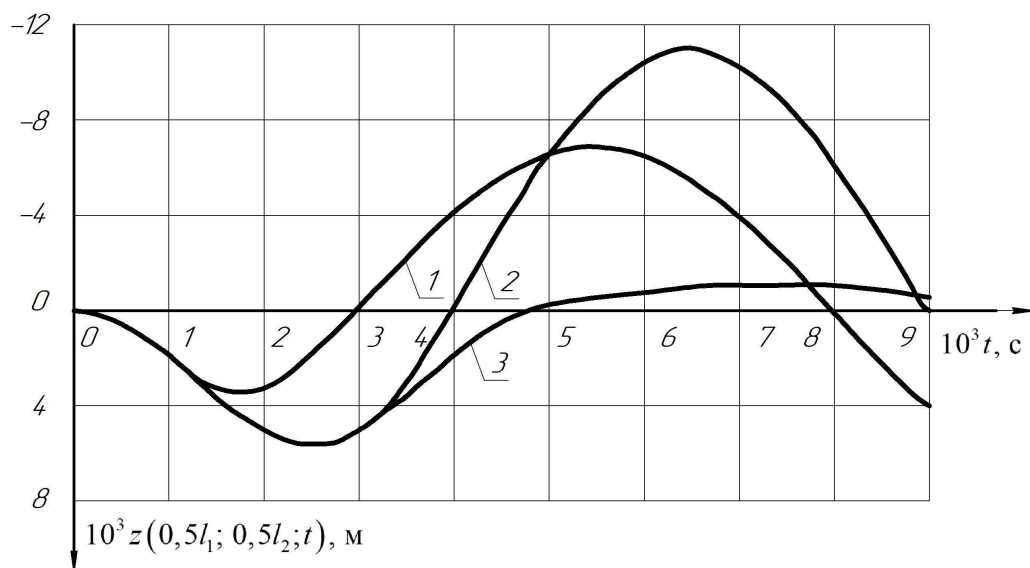


Рис. 1. – Прогини центру мембрани при різних  $t_1$ : 1 –  $t_1 = 10^{-3}$  с; 2 –  $t_1 = 3 \cdot 10^{-3}$  с; 3 –  $t_1 = 4,8 \cdot 10^{-3}$  с.

Указані в табл. 1 екстремуми попадають на графіки як відповідні точки, що підтверджує вірогідність аналітичних розв'язків.

**Динаміка круглї мембрани.** Її вертикальні прогини  $z = z(r, t)$  при вісесиметричному навантаженні описуємо диференціальним рівнянням:

$$-T_* \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \right) + c_f z + \rho_* \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = q J_0 \left( \frac{s \cdot r}{R} \right) [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (11)$$

Тут  $r$  – радіальна координата;  $R$  – радіус мембрани;  $J_0(z)$  – функція Бесселя першого роду індексу нуль;  $s$  – найменший додатний корінь рівняння:

$$J_0(s) = 0.$$

Решту позначень увели раніше.

Зазначимо, що в [7]  $s \approx 2,4048256$ .

Рівняння (11) описує рух мембрани лише при її контакті з двопараметричною пружною основою. Його розв'язок подаємо добутком:

$$z(r, t) = A(t) \cdot J_0 \left( \frac{s}{R} r \right), \quad (12)$$

у якому  $A(t)$  – невідома функція часу  $t$ .

Після підстановки (12) в (11), одержуємо:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + K^2 A = \frac{q}{\rho_*} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (13)$$

Тут  $K = \sqrt{\frac{1}{\rho_*} \left( T_* \frac{s^2}{R^2} + c_f \right)}$  – частота коливань кругової мембрани при двобічному контакті з основою.

По аналогії з (5), розв'язок рівняння (13), що задовольняє нульовим початковим умовам, подаємо в формі:

$$A(t) = \begin{cases} z_{ck} (1 - \cos(Kt)), & t \leq t_1; \\ 2z_{ck} \sin \frac{Kt_1}{2} \sin \left( K \left( t - \frac{t_1}{2} \right) \right), & \text{при} \\ & t \geq t_1, \end{cases} \quad (14)$$

де  $z_{ck} = \frac{q}{T_* \frac{s^2}{R^2} + c_f}$  – статичний прогин центру мембрани, спричинений тиском  $q(r) = q J_0 \left( s \frac{r}{R} \right)$ .

Як і раніше, значення  $t_1$  обмежуємо нерівністю  $t_1 < 2\pi/K$ . Тоді розв'язок (14) має чинність при  $t \in (0; t^*)$ , де:

$$t^* = \frac{\pi}{K} + \frac{t_1}{2}.$$

У відповідності з (12), (14) максимальний прогин центру мембрани вниз, куди спрямований силовий імпульс, становить:

$$a_0(t_1) = \begin{cases} 2z_{ck} \sin \frac{Kt_1}{2}, & t_1 \leq \pi/K; \\ 2z_{ck}, & t_1 \geq \pi/K. \end{cases} \quad (15)$$

Час  $t_e$  досягнення цього прогину можна знайти за формулами:  $t_e = \frac{\pi}{2K} + \frac{t_1}{2}$ , коли  $t_1 \leq \pi/K$ , і  $t_e = \pi/K$ , коли  $t_1 > \pi/K$ .

У вихідне положення  $z(r, t) = 0$  мембрана повертається при  $t = t^*$  зі швидкістю в центрі  $r = 0$ :

$$-v_0 = \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=t^*} = -2z_{ck} K \sin \frac{Kt_1}{2}. \quad (16)$$

Подальший рух центру мембрани описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + k^2 A = 0, \quad (17)$$

у якому  $k = \frac{s}{R} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  – частота вільних коливань круглї мембрани без основи.

Розв'язок рівняння (17), з урахуванням (16), подаємо в формі:



$$A(t) = -2z_{ck} \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2} \sin \left( k(t - t^*) \right).$$

Із нього випливає, що амплітуда прогину мембрани вгору становить:

$$a_1(t_1) = 2z_{ck} \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2} \quad (18)$$

і досягається при:

$$t = t_m = \frac{\pi}{2K} + t^*.$$

Згідно з (15), (18), відношення амплітуд прогину мембрани, при  $t_1 < \pi/K$ , дорівнює:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{K}{k} = \text{const}.$$

Воно залежить від  $t_1$ , коли  $t_1 \in (\pi/K; 2\pi/K)$ , бо тоді:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2}.$$

Таким чином, умовою прояву динамічного ефекту несиметрії пружної характеристики системи, коли  $a_1(t_1) > a_0(t_1)$ , є виконання нерівності  $K > k$ . При цьому тривалість дії імпульсу повинна попадати в інтервал  $t_1 \in (0; t_r)$ , де:

$$t_r = \frac{2}{K} \left( \pi - \arcsin \frac{k}{K} \right).$$

**Приклад 2.** Беремо для розрахунку круглу мембрану з радіусом  $R = 0,5$  м. Решту числових даних залишаємо тими, що в попередньому прикладі. Для них:  $K = 1276,5772 \text{ с}^{-1}$ ;  $k = 680,1874 \text{ с}^{-1}$ ;  $z_{ck} = 0,002808$  м;  $t_r = 0,004042$  с;  $K/k = 1,8768$ . Розраховані графіки залежностей амплітуд прогинів центру мембрани від тривалості дії імпульсу в безрозмірних координатах подано на рис. 2.

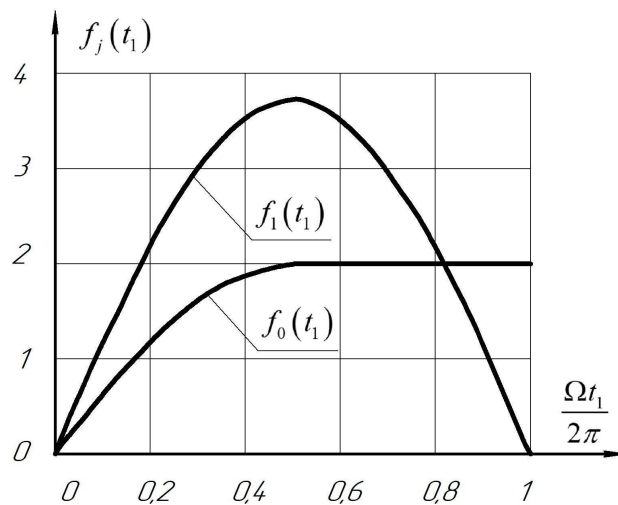


Рис. 2. – Графіки функцій  $f_j(t_1) = \frac{a_j(t_1)}{z_{ck}}$ ;  $j = 0; 1$ .

Якщо розглядати  $f_0(t_1)$  і  $f_1(t_1)$  як коефіцієнти динамічності прямої дії та зворотної реакції, то найбільше значення  $f_0(t_1) = 2$ , що відомо в динаміці лінійних систем. Найбільше значення коефіцієнта динамічності зворотної реакції суттєво більше двох, що є наслідком несиметрії пружної характеристики системи.

**Узагальнення.** Вище припускали, що тривалість дії імпульсу не перевищує періоду основного тону коливань мембрани, підкріпленої двобічною основою. Але одержані формули можна використовувати для розрахунку коливань мембрани при довільних тривалостях прямокутного імпульсу, якщо в них замінити  $t_1$  і  $t$  відповідно на  $t_1 - \frac{2\pi n}{\Omega}$  і  $t - \frac{2\pi n}{\Omega}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тоді формули стануть придатні для обчислення переміщень прямокутної

мембрани на проміжку  $t \in \left( \frac{2\pi n}{\Omega}; \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \right)$  при умові, що розвантаження мембрани відбувається теж на цьому проміжку, тобто  $t_1 \in \left( \frac{2\pi n}{\Omega}; \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \right)$ . Це стосується і круглої мембрани, якщо замінити  $\Omega$  на частоту  $K$ .

**Висновки.** Дослідження показало, що для прямокутної та круглої мембран, підкріплених однобічною пружною основою, існують такі тривалості імпульсного навантаження, коли прогини мембрани в напрямі дії імпульсу менші за прогини її у протилежному напрямі, що є проявом динамічного ефекту несиметрії пружної характеристики коливальної системи.

#### Список літератури

1. Воронай А. В. Идентификация нестационарной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на прямоугольную мембрану // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. Технологии в машиностроении. – 2000. – Вып. 124. – С. 95 – 99.
2. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Шарпата А. С. Идентификация внешней нагрузки, действующей на круговую мембрану // Автомобильный транспорт. – 2001. – Вып. 7 – 8. – С. 226 – 229.
3. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембраны несущей несколько сосредоточенных масс // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 54 (960). – С. 209 – 216.
4. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Колебания мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – № 37 (1010). – С. 223 – 230.
5. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М. : Физматгиз, 1960. – 492 с.
6. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л. : Машиностроение, 1976. – 320 с.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
8. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при механічному ударі // Вібрації в техніці та технологіях. – 2018. – № 2 (89). – С. 36 – 40.
9. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при імпульсному навантаженні // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – 2018. – № 33 (1309). – С. 37 – 42.

#### References (transliterated)

1. Voropay A. V. Identifikatsiya nestatsionarnoy sosredotochennoy nagruzki, vozdeystvuyushhey na pryamougol'nyuyu membranu [Identification of non-stationary concentrated load acting on a rectangular membrane]. *Vestnik Khar'kovskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Tekhnologii v mashinostroyenii* [Bulletin of the Kharkov State Polytechnic University. Technologies in mechanical engineering]. 2000, vol. 124, pp. 95–99.
2. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Sharapata A. S. Identifikatsiya vneshney nagruzki, deystvuyushhey na krugovuyu membranu [Identification of the external load acting on a circular membrane]. *Avtomobil'nyy transport* [Automobile transport]. 2001, vol. 7–8, pp. 226–229.
3. Yanyutin E. G., Egorov P. A. Nestatsionarnyye kolebaniya membrany nesushhey neskol'ko sosredotochennykh mass [Unsteady vibrations of the membrane carrying several concentrated masses]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2012, no. 54 (960), pp. 209–216.
4. Yanyutin E. G., Egorov P. A. Kolebaniya membrany, kontaktiruyushhey s uprugim osnovaniem, pri impul'snom nagruzhennii [Oscillations of membrane in contact with elastic base under pulsed loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2013, no. 37 (1010), pp. 223–230.
5. Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii [Beams, plates and shells on an elastic foundation]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 492 p.
6. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and shock]. Leningrad, Mashinostroyeniye Publ., 1976. 320 p.
7. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
8. Ol'shanskyy V. P., Ol'shanskyy S. V. Pro efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystyky kolyval'noyi systemy pry mekhanichnomu udari [On the effect of asymmetry of the power characteristic of the vibrational system during mechanical impact]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Vibrations in technic and technologies]. 2018, no. 2 (89), pp. 36–40.
9. Ol'shanskyy V. P., Ol'shanskyy S. V. Pro dynamichnyy efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystyky kolyval'noyi systemy pry impul'snomu navantazhennii [On the dynamic effect of asymmetry of the power characteristic of the oscillatory system under pulsed loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. 2018, no. 33 (1309), pp. 37–42.

Надійшла (received) 09.03.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich)** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

**Сліпченко Максим Володимирович (Слипченко Максим Владимирович, Slipchenko Maksym Volodimirovich)** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 712-09-89; e-mail: Slipchenko\_M@ukr.net.

**I. I. PERSHYN, I. A. TOKMAKOVA, YE. A. DUMYCH**

## CONSTRUCTION OF DISCONTINUOUS INTERLINEATION POLYNOMIAL SPLINES FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

The article suggests a general method for constructing discontinuous interlineation polynomial splines, which, as a partial case, include discontinuous and continuously differentiable splines. The theorems on interlineation and approximation properties of such discontinuous structures are formulated and proved. On the basis of the constructed discontinuous splines, a method for restoration of functions of two variables with first kind discontinuities is created. The theorems on the error of the approximation of discontinuous functions by the constructed discontinuous interlineation splines are proved. Examples are given.

**Key words:** discontinuous function, spline, interlineation, first kind discontinuity, interpolation.

**Ю. І. ПЕРШИНА, І. А. ТОКМАКОВА, Є. А. ДУМИЧ**

## ПОБУДОВА РОЗРИВНИХ ІНТЕРЛІНАЦІЙНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Запропоновано загальний метод побудови розривних інтерлінаційних поліноміальних сплайнів, які як частинний випадок включають в себе розривні та неперервно-диференційовні сплайни. Сформульовані та доведені теореми про інтерлінаційні та апроксимаційні властивості таких розривних конструкцій. На основі побудованих розривних сплайнів створений метод відновлення функцій двох змінних, що мають розриви першого роду. Доведені теореми про похибку наближення розривних функцій побудованими розривними інтерлінаційними сплайнами. Наведені приклади.

**Ключові слова:** розривна функція, сплайн, інтерлінація, розрив першого роду, інтерполяція.

**Ю. И. ПЕРШИНА, И. А. ТОКМАКОВА, Е. А. ДУМИЧ**

## ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ИНТЕРЛИНАЦИОННЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Предложен общий метод построения разрывных интерлиационных полиномиальных сплайнов, которые как частный случай включают в себя разрывные и непрерывно-дифференцируемые сплайны. Сформулированы и доказаны теоремы об интерлиационных и аппроксимационных свойствах таких разрывных конструкций. На основе построенных разрывных сплайнов создан метод восстановления функций двух переменных, имеющих разрывы первого рода. Доказаны теоремы о погрешности приближения разрывных функций построенными разрывными интерлиационными сплайнами. Приведены примеры.

**Ключевые слова:** разрывная функция, сплайн, интерлиация, разрыв первого рода, интерполяция.

**Introduction.** The problems of two-, three-, and four-dimensional computer tomography were studied in [1, 2] in detail. Computational experiments were carried out on the example of the human brain and moving human heart. The tomograms upcoming from the real functioning computer tomograph were used as input data. But the shortcoming of the method developed was the assumption that the objects studied were continuous. In fact the contemporary methods of computer tomography do not use the information about the internal structure of the human body, which is not the case in reality since each internal organ (such as stomach, liver, pancreas, ridge, etc.) has its own shape and tissue density. Hence, we deal with discontinuous objects.

Consider the following example. One of the more complicated problems of solid mechanics is studying the cracks at the internal points of a solid, where the cracks are actually the inclusions at the internal points of a body void of the material composing the body proper. One can say that the density of such a body is discontinuous, i.e. the density outside the cracks differs from that in the domain bounded by the crack walls.

Consequently, developing and studying the theory of approximation of discontinuous functions is relevant.

**Analysis of recent studies.** Nowadays, the main attention in the theory of functions of several variables is on the approximation of continuous and differentiable functions by continuous and differentiable splines. Nevertheless, practice shows that the multidimensional objects to be studied are mostly described by discontinuous functions. In [3] the precision of description of the internal structure of a 3D body is improved by taking into account the a-priori information about the body parts using appropriate functions of tree variables. Namely, the method interprets the information on the internal body structure as discontinuous function of three variables having discontinuities at the points of the surfaces bounding neighboring subdomains.

The whole development of computational and applied mathematics testifies that using any extra information about the object studied may lead to its more precise and quality reconstruction. For example, in [3] using the equation of the human skull surface is proposed for the precision reconstruction of the internal structure of a body.

Petukhov A. P. in his work [4] studies approximations of discontinuous functions in the Hausdorff metric. There exist methods for finding discontinuous solutions of boundary value problems developed in particular by Serhiyenko I. V., Deyneka V. S., Skopets'kyi V. V., Lytvyn O. M. et al. [5]. In the paper by A. L. Aheev, T. V. Antonova [6] a method for determining the number of discontinuity points and their locations using the Gibbs phenomenon is proposed. Nevertheless, the method requires additional information, namely, the minimal and maximal jumps of the approximating function. Moreover, it is assumed that the intervals in which the Gibbs phenomena are located do not intersect, i.e. separating the points closely located is impossible.

The first step towards solving this problem was taken in [7 – 9], where the method for approximating discontinuous functions of two variables by discontinuous interpolation splines on rectangular and triangular node grid was proposed. In [10] an algorithm for determining the discontinuity lines for a function of two variables using discontinuous interpolants constructed was developed.

This paper deals with constructing and studying the discontinuous interlineation operators for approximating discontinuous functions of two variables by its known traces on a system of lines using rectangular elements in the case of known discontinuity lines. The method presented will allow finding the discontinuity lines of a function of two variables, determining the optimal nodes of the approximating discontinuous interlineation spline, and restoring inhomogeneous internal structure.

**Problem setting.** Let  $f(x, y)$  be a discontinuous function in the domain  $D$ . Assume that the domain  $D$  is parted by straight lines  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$ ,  $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$  into rectangular elements  $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . The function  $f(x, y)$  and its derivatives up to the order  $\rho - 1$  have the first kind discontinuities on the boundaries of these rectangular elements (possibly not all of them). It is required to construct a discontinuous spline such that interlineation and approximation properties hold.

**Construction of discontinuous interlineation operator.** We introduce the notations:  $\varphi_l^+(y) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y)$ ,  $\varphi_l^-(y) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y)$  for the trace of the function  $f(x, y)$  on the lines  $x = x_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . If  $\varphi_l^+(y) = \varphi_l^-(y)$ , then the function  $f(x, y)$  is continuous on the line  $x = x_i$ , otherwise it has a discontinuity on the given line.

Consider the element  $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

**Definition 1.** The discontinuous interlineation polynomial spline in the domain  $D$  corresponding to the given partition of  $D$  into subdomains  $\Pi_{ij}$  is the function:

$$S(x, y) = S_{ij}(x, y), \quad S_{ij}(x, y) = S1_{ij}(x, y) + S2_{ij}(x, y) - S12_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in \Pi_{ij} \subset D, \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} S1_{ij}(x, y) &= S1_{ij}(x, y; \{\varphi_{i-1,s}(y)\}; \{\varphi_{i,s}(y)\}, s = \overline{0, \rho-1}) = \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi_{i-1,s}^+(y) \cdot h1_{i-1,s}(x) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi_{i,s}^-(y) \cdot h1_{i,s}(x); \\ S2_{ij}(x, y) &= S2_{ij}(x, y; \{\varphi_{j-1,p}(x)\}; \{\varphi_{j,p}(x)\}, p = \overline{0, \rho-1}) = \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi_{j-1,p}^+(x) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi_{j,p}^-(x) \cdot h2_{j,p}(y); \\ S12_{ij}(x, y) &= S12_{ij}(x, y; \{\varphi_{i-1,s}(y)\}; \{\varphi_{i,s}(y)\}, s = \overline{0, \rho-1}; \{\varphi_{j-1,p}(x)\}; \{\varphi_{j,p}(x)\}, p = \overline{0, \rho-1}) = \\ &= \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} h1_{i-1,s}(x) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} h1_{i-1,s}(x) h2_{j,p}(y) + \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{-+} h1_{i,s}(x) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} h1_{i,s}(x) h2_{j,p}(y), \end{aligned}$$

$h1_{k,s}(x)$ ,  $h2_{l,p}(y)$  are the Hermit basic polynomials of degree  $2\rho - 1$  with the properties:

$$h1^{(s')}_{k,s}(x_{k'}) = \delta_{k,k'} \delta_{s,s'}, \quad k, k' \in \{i-1, i\}, s, s' \in \{0, \rho-1\}, \quad h2^{(p')}_{l,p}(y_{l'}) = \delta_{l,l'} \delta_{p,p'}, \quad l, l' \in \{j-1, j\}, p, p' \in \{0, \rho-1\}.$$

**Theorem 1.** Assume

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{i,s}^+(y_j)\right)^{(p)} &= \left(\varphi_{j,p}^+(x_i)\right)^{(s)} = C_{ijsp}^{++}, \quad \left(\varphi_{i,s}^-(y_j)\right)^{(p)} = \left(\varphi_{j,p}^+(x_i)\right)^{(s)} = C_{ijsp}^{+-}, \\ \left(\varphi_{i,s}^-(y_j)\right)^{(p)} &= \left(\varphi_{j,p}^-(x_i)\right)^{(s)} = C_{ijsp}^{--}, \quad \left(\varphi_{i,s}^+(y_j)\right)^{(p)} = \left(\varphi_{j,p}^-(x_i)\right)^{(s)} = C_{ijsp}^{-+}. \end{aligned}$$

Then the function  $S_{ij}(x, y)$  satisfies the following properties on the boundary of the rectangle  $\Pi_{ij}$ :

$$\frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \Big|_{x=x_{i-1}} = \varphi_{i-1,s'}^+(y), \quad \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \Big|_{x=x_i} = \varphi_{i,s'}^-(y), \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j, \quad s' = \overline{0, \rho-1}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^{p'} S_{ij}(x, y)}{\partial y^{p'}} \Big|_{y=y_{j-1}} = \varphi_{j-1,p'}^+(x), \quad \frac{\partial^{p'} S_{ij}(x, y)}{\partial y^{p'}} \Big|_{y=y_j} = \varphi_{j,p'}^-(x), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad p' = \overline{0, \rho-1}. \quad (3)$$

**Proof.** Substituting  $x = x_{i-1}$  in (1) we get:

$$\begin{aligned}
S_{ij}(x_{i-1}, y) &= S1_{ij}(x_{i-1}, y) + S2_{ij}(x_{i-1}, y) - S12_{ij}(x_{i-1}, y) = \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot h1_{i-1,s}(x_{i-1}) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot h1_{i,s}(x_{i-1}) + \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} h1_{i-1,s}(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} h1_{i-1,s}(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) + \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{-+} h1_{i,s}(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} h1_{i,s}(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) = \\
&= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot \delta_{i-1,i-1} \delta_{s,0} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot \delta_{i,i-1} \delta_{s,0} + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{-+} \delta_{i,i-1} \delta_{s,0} h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} \delta_{i,i-1} \delta_{s,0} h2_{j,p}(y) = \\
&= \varphi 1_{i-1,0}^+(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,0,p}^{++} h2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,0,p}^{+-} h2_{j,p}(y) = \left| \begin{array}{l} C_{i-1,j-1,0,p}^{++} = \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \\ C_{i-1,j,0,p}^{+-} = \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \end{array} \right| = \\
&= \varphi 1_{i-1,0}^+(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) = \varphi 1_{i-1,0}^+(y).
\end{aligned}$$

Hence,  $S_{i,j}(x_{i-1}, y) = \varphi 1_{i-1,0}^+(y)$ ,  $y_{j-1} \leq y \leq y_j$ .

By analogy setting  $x = x_i$ ,  $y = y_{j-1}$ ,  $y = y_j$  in (1) we derive other equalities.

Let  $1 \leq s' \leq \rho-1$ , then:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \Big|_{x=x_i} &= \frac{\partial^{s'} S1_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \Big|_{x=x_i} + \frac{\partial^{s'} S2_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \Big|_{x=x_i} - \frac{\partial^{s'} S12_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \Big|_{x=x_i} = \\
&= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i-1,s}(x) \Big|_{x=x_{i-1}} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i,s}(x) \Big|_{x=x_{i-1}} + \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\rho-1} \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} \varphi 2_{j-1,p}^+(x) \Big|_{x=x_{i-1}} \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} \varphi 2_{j,p}^-(x) \Big|_{x=x_{i-1}} \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i-1,s}(x) \Big|_{x=x_{i-1}} h2_{j-1,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i-1,s}(x) \Big|_{x=x_{i-1}} h2_{j,p}(y) - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{-+} \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i,s}(x) \Big|_{x=x_{i-1}} h2_{j-1,p}(y) + \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i,s}(x) \Big|_{x=x_{i-1}} h2_{j,p}(y) = \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot \delta_{i,i-1} \delta_{s',s} + \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^{+(s')} (x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^{-(s')} (x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} h2_{j-1,p}(y) - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} h2_{j,p}(y) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{+-} \delta_{i,i-1} \delta_{s',s} h_{2,j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} \delta_{i,i-1} \delta_{s',s} h_{2,j,p}(y) = \left| C_{i-1,j-1,s',p}^{++} = \varphi_{2^{+(s')}}_{j-1,p}(x_{i-1}) \right| = \\
& = \varphi_{1^{+}_{i-1,s'}}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s',p}^{++} \cdot h_{2,j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s',p}^{+-} \cdot h_{2,j,p}(y) - \\
& - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s',p}^{++} h_{2,j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s',p}^{+-} h_{2,j,p}(y) = \varphi_{1^{+}_{i-1,s'}}(y).
\end{aligned}$$

By analogy properties (2) for  $x = x_i$  and (3) are proved.

The proof of Theorem 1 is now complete.

**Theorem 2.** Let

$$\varphi_{1,s}^{+}(y) = \varphi_{1,s}^{+}(y) = \varphi_{1,s}(y), \quad s = \overline{0, \mu}, \quad 0 \leq \mu \leq \rho-1, \quad \varphi_{2,p}^{-}(x) = \varphi_{2,p}^{+}(x) = \varphi_{2,p}(x), \quad p = \overline{0, \nu}, \quad 0 \leq \nu \leq \rho-1.$$

Then the function  $S(x, y) = S_{ij}(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Pi_{ij}$  has the properties:  $S(x, y) \in C^{\mu, \nu}(D)$ ,

$$\left. \frac{\partial^{s'} S(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \varphi_{1,s'}(y), \quad i = \overline{1, m}, \quad s' = \overline{0, \mu}, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^{p'} S(x, y)}{\partial y^{p'}} \right|_{y=y_j} = \varphi_{2,p'}(x), \quad j = \overline{1, n}, \quad p' = \overline{0, \nu}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (5)$$

*Proof.* The statement of the theorem follows from the fact that in case  $\varphi_{1,s}(y) \in C^{\rho-1}[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\varphi_{2,p}(x) \in C^{\rho-1}[y_{j-1}, y_j]$  the function  $S_{ij}(x, y)$  belongs to the class  $C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{ij})$  for each element  $\Pi_{ij}$ . Hence, the function  $S(x, y)$  is of the class  $C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{ij})$  as well and its derivatives of the order  $\mu, \nu$  respectively stay continuous on the border between the adjacent  $\Pi_{ij}$ , the proof of properties (4), (5) following the same lines as in Theorem 1.

Thus Theorem 2 is proved.

**Remark 1.** The above implies that in the conditions of Theorem 2 the function  $S(x, y)$  has discontinuous partial derivatives of the order greater than  $\mu$  in  $x$  and greater than  $\nu$  in  $y$ .

**Remark 2.** In general, it is possible that the function  $S(x, y)$  and its derivative up to respective orders have discontinuities on the boundaries of one or several elements only.

**Theorem 3.** If the functions  $\varphi_{1,s}^{+}(y)$ ,  $\varphi_{1,s}^{-}(y)$  are polynomials (different in general) of degree  $Q \geq 2\rho-1$ , and the functions  $\varphi_{2,p}^{+}(x)$ ,  $\varphi_{2,p}^{-}(x)$  are polynomials (different in general) of degree  $Q \geq 2\rho-1$ , then the function  $S(x, y)$  is a piecewise polynomial discontinuous spline, which coincides with a polynomial depending on two variables in each of the rectangles  $\Pi_{ij} \subset D$ . In particular, if  $Q = 2\rho-1$ , then  $S(x, y)$  is a discontinuous piecewise polynomial spline of degree  $2\rho-1$  in each of the variables  $(x, y)$ .

*The Proof* of the theorem follows from the fact that the Hermit polynomial basic functions are used for constructing the function  $S_{ij}(x, y)$ . Thus under the assumptions of Theorem 3  $S_{ij}(x, y)$  is polynomials itself. If  $Q = 2\rho-1$ , then  $S_{ij}(x, y)$  is a polynomial of degree  $2\rho-1$  in each of its variables. If, moreover, the conditions of Theorem 2 do not hold, then the function  $S_{ij}(x, y)$  has discontinuities on the borders between different elements  $\Pi_{ij}$ .

Theorem 3 is now proved.

**Remark 3.** We stress one more time that it is not necessary for  $S(x, y)$  to have discontinuities on all the boundaries between all the elements. Moreover, it is not required that the spline has discontinuous derivatives of order  $\mu+1, \mu+2, \dots, \rho-1$  and  $\nu+1, \nu+2, \dots, \rho-1$  in  $x$  and  $y$  respectively on all four sides of each element.

**Theorem 4.** Assume that the approximated function  $f(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$  and  $\varphi_{1^{+}_{i-1,s}}(y) \neq \varphi_{1^{-}_{i,s}}(y)$ ,  $\varphi_{2^{+}_{j-1,p}}(x) \neq \varphi_{2^{-}_{j,p}}(x)$ ,  $s, p = \overline{0, \rho-1}$ . Then setting

$$\begin{aligned}
\varphi_{1^{+}_{i',s}}(y) &= \varphi_{1^{+}_{i,s}}(y) = f^{(s',0)}(x_{i'}, y), \quad i' \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad i' \neq i-1, \quad i' \neq i, \quad 0 \leq y \leq 1; \\
\varphi_{2^{+}_{j',p}}(x) &= \varphi_{2^{+}_{j,p}}(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j'}), \quad j' \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad j' \neq j-1, \quad j' \neq j, \quad 0 \leq x \leq 1; \\
\varphi_{1^{-}_{i-1,s}}(y) &= \varphi_{1^{-}_{i,s}}(y) = f^{(s,0)}(x_{i-1}, y), \quad 0 \leq y \leq y_{j-1} \text{ or } y_j \leq y \leq 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi 2_{j-1,p}^{-}(x) &= \varphi 2_{j-1,p}^{+}(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j-1}), \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \text{ or } x_i \leq x \leq 1; \\
\varphi 1_{i-1,s}^{+}(y) &= f^{(s,0)}(x_{i-1} + 0, y), \quad \varphi 1_{i,s}^{-}(y) = f^{(s,0)}(x_i - 0, y); \\
\varphi 1_{i-1,s}^{-}(y) &= f^{(s,0)}(x_{i-1} - 0, y), \quad \varphi 1_{i,s}^{+}(y) = f^{(s,0)}(x_i + 0, y); \\
\varphi 2_{j-1,p}^{+}(x) &= f^{(0,p)}(x, y_{j-1} + 0), \quad \varphi 2_{j,p}^{-}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j - 0); \\
\varphi 2_{j-1,p}^{-}(x) &= f^{(0,p)}(x, y_{j-1} - 0), \quad \varphi 2_{j,p}^{+}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j + 0),
\end{aligned}$$

the function  $S(x, y)$  belongs to the class  $C^{\rho-1, \rho-1}(D)$ . The function  $S(x, y)$  and its derivatives up to the order  $\rho-1$  in each of the variables are discontinuous on the boundaries of the element  $\Pi_{ij}$  only.

*Proof.* The theorem follows from the fact that the function  $S(x, y)$  has continuous derivatives up to the order  $\rho-1$  on the boundaries between all the elements other than  $\Pi_{ij}$ , where the discontinuities are possible. Which means that this function belongs to the required class:  $S(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$ .

End of the proof of Theorem 4.

**Theorem 5.** Let the assumptions of Theorem 4 hold. Then the error of approximation of a discontinuous function  $f(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{i,j})$  by an appropriate discontinuous interlineation spline  $S(x, y)$  is estimated by the formula:

$$\begin{aligned}
|f(x, y) - S(x, y)| &= O(\Delta 1^{2\rho} \Delta 2^{2\rho}), \quad (x, y) \in \Pi_{kl} \neq \Pi_{i,j}, \quad \Delta 1 = \max_k (x_k - x_{k-1}), \quad \Delta 2 = \max_l (y_l - y_{l-1}); \\
|f(x, y) - S(x, y)| &= O(\Delta i^{2\rho} \Delta j^{2\rho}), \quad (x, y) \in \Pi_{i,j}, \quad \Delta i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta j = y_j - y_{j-1}, \quad (i, j) \neq (k, l).
\end{aligned}$$

*Proof.* By Definition 1 the operator  $S_{ij}(x, y) = S_{ij} f(x, y)$  can be written in the form:

$$S_{ij} f(x, y) = S1_{ij} f(x, y) + S2_{ij} f(x, y) - S12_{ij} f(x, y).$$

By Theorem 3.2.1 in [3] the residue of approximation of the function  $f(x, y)$  by the interlineation formulae is given by the operator product of the residue of approximation of  $f(x, y)$  by the operators  $S1_{ij} f(x, y)$  and  $S2_{ij} f(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
RS_{ij} f(x, y) &= (f(x, y) - S_{ij} f(x, y)) = (f(x, y) - S1_{ij} f(x, y) - S2_{ij} f(x, y) + S12_{ij} f(x, y)) = \\
&= (f(x, y) - S1_{ij} f(x, y))(f(x, y) - S2_{ij} f(x, y)) = RS1_{ij} f(x, y) RS2_{ij} f(x, y).
\end{aligned}$$

In this case the estimate for the error follows from Corollary 3 of Theorem 3.2.2 in [3].

Theorem 5 is proved.

**Example.** Consider the rectangular domain  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ . Let  $\rho = 1$ ,  $m = 2$ ,  $n = 2$ . Introduce the nodes:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0.5$ ,  $y_2 = 1$ .

Then the partition of the domain  $D$  consists of four rectangular elements (fig. 1) given by the formulae:

$$\begin{aligned}
\Pi_{11} &= \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}, \quad \Pi_{12} = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_1 < y < y_2\}, \\
\Pi_{21} &= \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_0 < y < y_1\}, \quad \Pi_{22} = \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}.
\end{aligned}$$



Fig. 1 – Domain  $D$  of the approximated function  $f(x, y)$ .

Let  $D$  be the domain of a function  $f(x, y)$  we need to approximate. Determine the function  $f(x, y)$  at the vertices of the rectangle  $\Pi_{ij}$  as follows:

$$\begin{aligned}
\Pi_{11} : f^{+,+}(0;0) &= f(0+0;0+0) = 1, & \Pi_{12} : f^{+,+}(0;0.5) &= f(0+0;0.5+0) = 1, \\
f^{+,-}(0;0.5) &= f(0+0;0.5-0) = 2, & f^{+,-}(0;1) &= f(0+0;1-0) = 2, \\
f^{-,-}(0.5;0.5) &= f(0.5-0;0.5-0) = 1, & f^{-,-}(0.5;1) &= f(0.5-0;1-0) = 1, \\
f^{-,+}(0.5;0) &= f(0.5-0;0+0) = 2; & f^{-,+}(0.5;0.5) &= f(0.5-0;0.5+0) = 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{22} : f^{+,+}(0.5;0.5) &= f(0.5+0;0.5+0) = 3, & \Pi_{21} : f^{+,+}(0.5;0) &= f(0.5+0;0+0) = 3, \\
f^{+,-}(0.5;1) &= f(0.5+0;1-0) = 4, & f^{+,-}(0.5;0.5) &= f(0.5+0;0.5-0) = 4, \\
f^{-,-}(1;1) &= f(1-0;1-0) = 3, & f^{-,-}(1;0.5) &= f(1-0;0.5-0) = 3, \\
f^{-,+}(1;0.5) &= f(1-0;0.5+0) = 4, & f^{-,+}(1;0) &= f(1-0;0+0) = 4.
\end{aligned}$$

Construct the discontinuous spline:

$$\begin{aligned}
S(x,y) &= \\
&= \begin{cases} f^{+,+}(0;0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{+,-}(0.5;0) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ + f^{+,-}(0;0.5) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} + f^{-,-}(0.5;0.5) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, & (x,y) \in \Pi_{11} \\ f^{+,+}(0;0.5) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{+,-}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ + f^{+,-}(0;1) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + f^{-,-}(0.5;1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, & (x,y) \in \Pi_{12} \\ f^{+,+}(0.5;0) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{+,-}(1;0) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ + f^{+,-}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} + f^{-,-}(1;0.5) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, & (x,y) \in \Pi_{21} \\ f^{+,+}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{+,-}(1;0.5) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ + f^{+,-}(0.5;1) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + f^{-,-}(1;1) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, & (x,y) \in \Pi_{22} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 1 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 2 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 2 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y}{0.5} + 1 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y}{0.5}, & (x,y) \in \Pi_{11} \\ 1 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-1}{0.5-1} + 2 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-1}{0.5-1} + 2 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5} + 1 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5}, & (x,y) \in \Pi_{12} \\ 3 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-0.5}{-0.5} + 4 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 4 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y}{0.5} + 3 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y}{0.5}, & (x,y) \in \Pi_{21} \\ 3 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-1}{0.5-1} + 4 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-1}{0.5-1} + 4 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-0.5}{1-0.5} + 3 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5}, & (x,y) \in \Pi_{22} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 2x+2y-8xy+1, & (x,y) \in \Pi_{11} \\ -10x-6y+8+8xy, & (x,y) \in \Pi_{12} \\ -4xy+2x+2y+2, & (x,y) \in \Pi_{21} \\ -8xy+6x+6y-1, & (x,y) \in \Pi_{22} \end{cases}.
\end{aligned}$$

The function  $S(x,y)$  has the following trace on the boundary between the elements  $\Pi_{11}$  and  $\Pi_{21}$  for  $x < x_1$ :

$$S(x,y) = S(x_1-0,y) = S_{11}(x_1,y) = f^{+,-}(0.5;0) \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,-}(0.5;0.5) \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad y_0 \leq y \leq y_1.$$

By analogy:

$$S(x,y) = S(x_1+0,y) = S_{21}(x_1,y) = f^{+,+}(0.5;0) \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{+,-}(0.5;0.5) \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad y_0 \leq y \leq y_1.$$

Hence, if  $f^{+,-}(0.5;0) \neq f^{+,+}(0.5;0)$ , then the spline has a discontinuity at the point  $(0.5;0)$ . Moreover, if  $f^{+,+}(0.5;0.5) \neq f^{+,-}(0.5;0.5)$ , then the spline is discontinuous on the line  $x = 0.5$ ,  $y_0 \leq y \leq y_1$ .

Let the approximated function be given by the formula:

$$f(x,y) = S_{ij}(x,y) + \frac{(x-x_{i-1})(x_i-x)(y-y_{j-1})(y_j-y)}{4}, \quad (x,y) \in \Pi_{i,j}, i,j=1,2.$$

Then it has the partial derivative  $f^{2,2}(x,y) \equiv 1$ ,  $\forall (x,y) \in \Pi_{ij}$  in each of the four rectangular elements  $\Pi_{ij}$  of its domain. Hence, the error of approximation of such a discontinuous function by the discontinuous spline constructed



above satisfies the inequality:

$$\max_{(x,y) \in \Pi_{ij}} |f(x,y) - S_{i,j}(x,y)| \leq f^{(2,2)}(\xi, \eta) \cdot \frac{\Delta i^2 \Delta j^2}{2! 2!} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2! 2!} = \frac{1}{64} \approx 0.016.$$

**Conclusions.** The paper presents a general approach to constructing discontinuous interlineation splines, which particular cases are discontinuous splines and splines continuously differentiable up to some order in each variable. The theorems on interlineation and approximation properties of such discontinuous structures are formulated and proved. In particular, the mentioned properties lead the authors to the conclusion that the function of two variables discontinuous at some points or on some lines should be approximated by discontinuous interlineation splines. Such an approach enables one to get the approximation errors of the same order of accuracy in each element of the partition, which is peculiar for continuously differentiable interlineation splines.

As the next step of their research, the authors plan to develop the theory of discontinuous interlineation splines on the domains of complicated shape bounded by the arcs of known curves.

#### Bibliography

1. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетатії функції // Доповіді НАНУ. – 2005. – № 8. – С. 67 – 71.
2. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації // Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів». – Київ : Національний авіаційний університет. – 2008. – С. 85 – 86.
3. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х. : Основа, 2002. – 504с.
4. Петухов А. П. О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Математические заметки. – 1985. – Т. 32. – № 1. – С.25 – 40.
5. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление : монография. – К. : Наукова думка, 2007. – 703 с.
6. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сибирский журнал индустриальной математики. – Новосибирск, 2012. – Т. 15. – № 1(49). – С. 3 – 13.
7. Литвин О. М., Першина Ю. І. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – № 1. – С. 63 – 72.
8. Литвин О. М., Першина Ю. І. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев, 2011. – №5. – С. 34 – 47.
9. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерлінантами з використанням трапецевидних елементів // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь, 2011. – № 2. – С. 59 – 70.
10. Литвин О. Н., Першина Ю. И., Сергиенко И. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4 – С. 126 – 134.

#### References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychna model' vidnovlennia tryvymirnykh ob'ektiv za yikh tomogramamy na systemi triokh grup pererizanykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsii funktsiyi [Mathematical model of restoration of three-dimensional objects by their tomograms on a system of three groups of cut planes using an interflatation function]. *Dopovidi NANU* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2005, no. 8, pp. 67–71.
2. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychno modeliuвання v komp'uterniy tomografiyi z vykorystanniam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computer tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi «Teoriya ta metody obrobky sygnaliv»* [Materials of the second international conference "Theory and methods of signal processing"]. Kyiv, 2008, pp. 85–86.
3. Lytvyn O. M. *Interlinatsiya funktsiyi ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlineation of functions and some of its applications]. Kharkov, Osnova Publ., 2002. 504 p.
4. Petukhov A. P. O priblizhenii razryvnykh funktsiy v metrike Khaudorfa [Approximation of discontinuous functions in the Hausdorff metric]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1985, vol. 32, no. 1, pp. 25–40.
5. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Analiz mnogokomponentnykh raspredelennykh sistem i optimal'noe upravlenie : monografiya* [Analysis of multicomponent distributed systems and optimal control : monograph]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2007. 703 p.
6. Ageev A. L., Antonova T. V. Aproksimatsiya liniy razryva zashumlyonnoy funktsii dvukh peremennykh [Approximation of discontinuity lines of a noise function of two variables]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics]. Novosibirsk, 2012, vol. 15, no. 1 (49), pp. 3–13.
7. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Pobudova kuskovo-biliniinykh splayniv dlya nablyzheniya funktsiyi z rozryvamy pershogo rodu u vuzlakh rektangulyatsiyi dvovymirnoyi oblasti [Construction of piecewise bilinear splines for the approximation of functions with discontinuities of the first kind in nodes of rectangulation of a two-dimensional region]. *Tavrichnyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. Symferopol, 2011, no. 1, pp. 63–72.
8. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Priblizhenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh s razryvami pervogo roda na liniyakh trianguyatsiyi dvumernoy oblasti [Approximation of discontinuous functions of two variables with discontinuities of the first kind on the triangulation lines of a two-dimensional domain]. *Upravlyayushchie sistemy i mashiny* [Control systems and machines]. Kyiv, 2011, no. 5, pp. 34–47.
9. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Nablyzheniya rozryvnykh funktsiy dvokh zminnykh rozryvnymy splayn-interlinantamy z vykorystanniam trapetsevidnykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous spline-interlineants using trapezoidal elements]. *Tavrichnyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. Symferopol, 2011, no. 2, pp. 59–70.
10. Lytvyn O. M., Pershyna I. I., Sergienko I. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Recovery of discontinuous functions of two variables when discontinuity lines are unknown (rectangular elements)]. *Kybernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.

Received (надійшла) 30.03.2019

**Першина Юлія Ігорівна (Першина Юлия Игоревна, Pershyna Iuliia Igorivna)** – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

**Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna)** – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: irina777111@ukr.net.

**Думич Єгор Андрійович (Думыч Егор Андреевич, Dumych Yegor Andreevich)** – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 930-39-79; e-mail: sianotalone@gmail.com.

UDC 65.012

**R. V. PETROVA, O. I. LIUBICHEVA, A. I. MOROZOVA**

### **MATHEMATICAL MODELS AND INFORMATIONAL TECHNOLOGIES OF INNOVATIVE PROJECT ARRANGEMENT IN THE STAKEHOLDERS' SYSTEM**

During the involvement of innovative projects into knowledge-intensive high-tech enterprises, the process of creating a system of interested stakeholder management becomes vital. The given work contains the results of conducted analysis concerning the problem of innovative potential management of high-tech enterprises. The necessity of the analysis of informational technologies in the conditions of the non-equilibrium economy is considered. Various models of project management in the system of stakeholders are presented in the work. The stages of Nicholas model are considered. A mathematical model is proposed for the management and investors of the project, in terms of maximizing profits under specified constraints.

**Key words:** innovative project, stakeholders, Mitchell's model, ASC model, informational technologies.

**Р. В. ПЕТРОВА, О. І. ЛЮБИЧЕВА, А. І. МОРОЗОВА**

### **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ОРГАНІЗАЦІЇ ІННОВАЦІЙНИХ ПРОЕКТІВ У СИСТЕМІ СТЕЙКХОЛДЕРІВ**

При залученні інноваційного проекту в наукомісткі високотехнологічні підприємства актуальним процесом стає створення системи управління зацікавленими учасниками. Проведено аналіз проблеми управління інноваційним потенціалом наукомістких підприємств. Розглянуто необхідність аналізу інформаційних технологій в умовах нерівноважної економіки. Розглянуто різні моделі управління проектами в системі зацікавлених осіб. Розглянуто етапи використання моделі Ніколаса. Запропоновано математичну модель для керівництва та інвесторів проекту, в умовах максимізації прибутку при заданих обмеженнях.

**Ключові слова:** інноваційний проект, стейкхолдери, модель Мітчелла, ASC модель, інформаційні технології.

**Р. В. ПЕТРОВА, О. И. ЛЮБИЧЕВА, А. И. МОРОЗОВА**

### **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОРГАНИЗАЦИИ ИННОВАЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ В СИСТЕМЕ СТЕЙКХОЛДЕРОВ**

При вовлечении инновационного проекта в наукоемкие высокотехнологичные предприятия актуальным процессом становится создание системы управления заинтересованными участниками. Проведен анализ проблемы управления инновационным потенциалом наукоемких предприятий. Рассмотрена необходимость анализа информационных технологий в условиях неравновесной экономики. Рассмотрены различные модели управления проектами в системе заинтересованных лиц. Рассмотрены этапы использования модели Николаса. Предложена математическая модель для руководства и инвесторов проекта, в условиях максимизации прибыли при заданных ограничениях.

**Ключевые слова:** инновационный проект, стейкхолдеры, модель Митчелла, ASC модель, информационные технологии.

**Introduction.** The analysis of practical innovative development has shown that the management of innovative potential requires an appropriate update not only in the field of creating a technological platform and innovative products but also in terms of creating an organizational and economic mechanism for managing innovative activity. Of particular importance is the creation of a stakeholder management system when high-tech enterprises and organizations are involved in an innovative project. In order to organize effective project activities with the participation of all stakeholders, it is necessary to carry out a set of interrelated mathematical models.

**Problem statement.** The methodological problem of managing the innovative potential of knowledge-intensive companies is not only the establishment of stakeholder groups, but also the analysis of informational technology and the development of a network model of various resource exchange, the assessment of network density and centrality in a non-equilibrium economy.

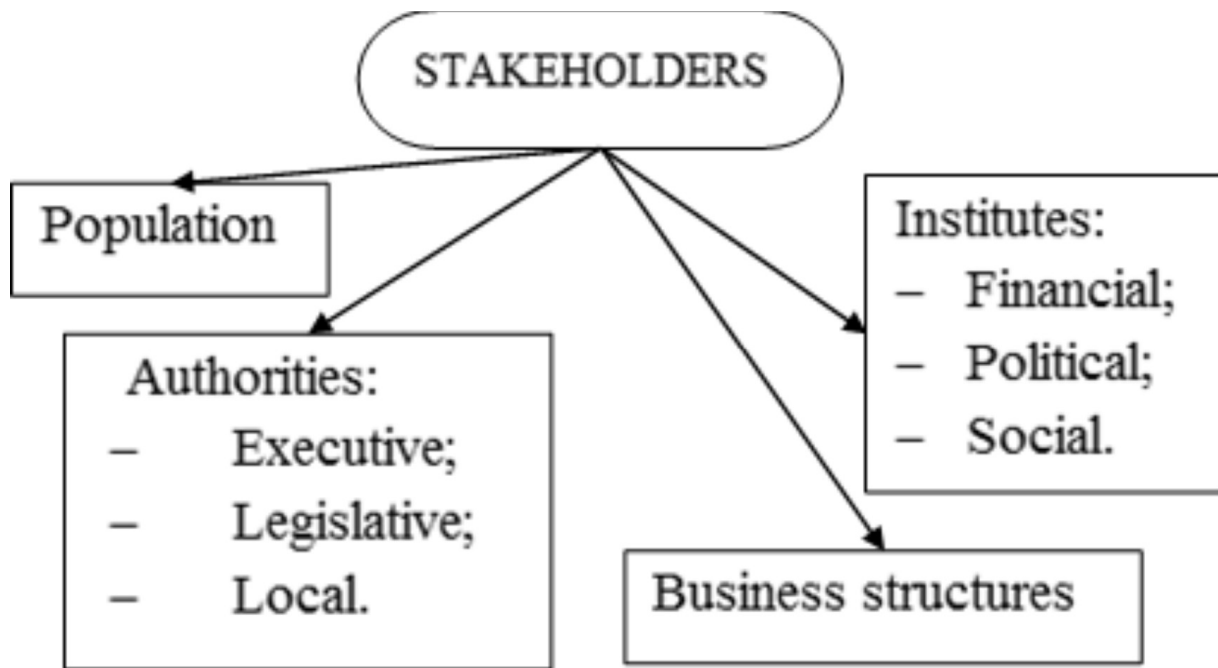


Fig. 1 – A system of stakeholders.

Stakeholders of innovative projects are legal entities and individuals or groups of persons whose interests are affected by the project during its life cycle. According to the international community of managers, the main groups of stakeholders include the following: shareholders and investors, creditors: banks and other credit organizations, partners and suppliers, buyers and customers, state and tax authorities, professional associations, media, non-governmental organizations, managers and senior management of the company, company staff, trade unions, competitors, local communities, public environmental, religious and other organizations [5].

Thus, a system of stakeholders in the organization and analysis of the innovation project in general can be presented in fig. 1.

Accounting the interests of stakeholders is important at all stages of project management, as it will reduce the direct negative impact on the project and prioritize those projects that have the most positive impact on stakeholders. Contemporarily in the management of complex projects are used both well-known and newly created models, methods, algorithms, and software. However, the number of unsuccessful projects in relation to the successful reaches, according to various estimates, from 40 to 60 %. At the same time, information technologies for innovative projects should also be created for all stages of the innovation cycle in order to ensure the interaction of demand and supply of innovative products.

**Model study.** Since the early 1960s, science has proposed a wide range of models, methods of planning and project management with great functionality [1]. At the same time, it should be noted that the number of complex projects and the volume of investments in them were growing at a significant rate, exceeding the possibility of their effective management. As mentioned in McKinsey's independent division research report, "estimates of global infrastructure expansion project development costs will be \$ 3.4 trillion per year between 2013 and 2030." [2] "90 % of megaprojects fail to cover all the costs, violate the executive schedule or goals because of underestimation of cost and overestimation of future requirements».

The choice of project management methods and tools is largely determined by which of the project stakeholders is considered as the subject of project management in each case. Different stakeholders in the same project have different expectations, roles, responsibilities and actions [6]. These differences significantly affect the formulation of their project objectives, the methods used, tools and technologies for solving management problems, focused on their specific needs.

The Mitchell's model is a mechanism for grouping project stakeholders [3]. In order to implement this, relevant attributes have to be selected (a classic example is the power, legality and urgency of the requirements), which may have one or another interested party and on which depends the importance of stakeholders. Each stakeholder is evaluated as it possesses an attribute, which allows it to be attached to the class of significance. These classes are ordered based on the importance of the corresponding set of attributes. Thus, the importance of the interested party is assessed as the importance of the class in which it is included. The classical Mitchell's model has the following form (fig. 2).

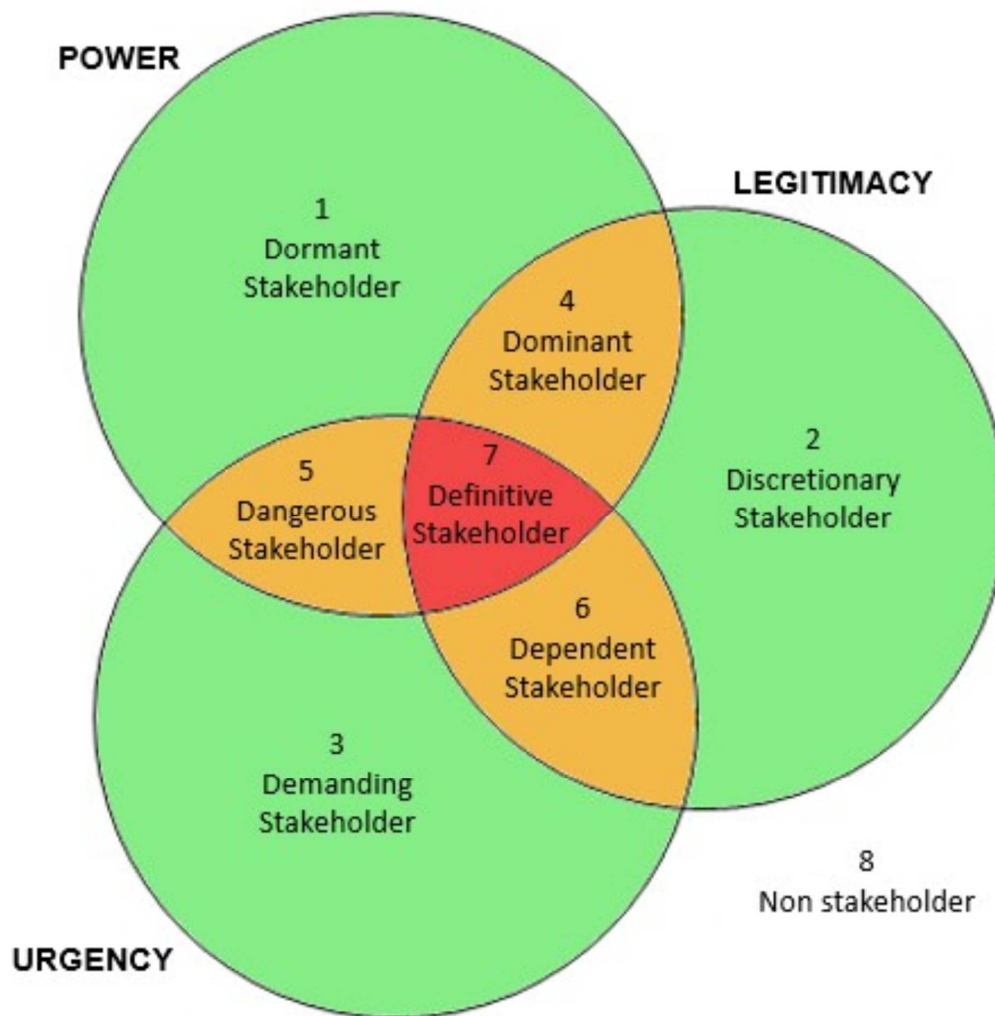


Fig. 2 – The classical Mitchell's model.

The Mitchell's model is used to group the stakeholders of the project, and for a detailed relationship between the stakeholders, it is necessary to use the Nicholas - Accountability Scorecard (ASC) model, which is a formalization of the system of responsibility indicators [4].

For each group of key stakeholders, the contributions that the project receives from them and the incentives (benefits) that the stakeholders receive from the project are identified.

Informational technology plays an important role in the successful management of innovative projects. Their implementation, in most cases, is carried out in the form of a network of multifunctional informational systems, consisting of customizable modules that use different approaches to data storage, which allows accessing all stakeholders; network communication and methods of transmission of information resources, important for the transfer of information between stakeholders.

Since an innovative science-intensive project is implemented within an organization or a group of organizations, the priority is to use this model to determine the relationship and responsibility between the organization implementing the project, the organization initiating the project, between the cluster members and other projects of the company. In the framework of this model, they operate with the concepts of "contribution" and "stimulus-reaction" [7]. Thus, when analyzing stakeholders in the management of projects, the business analysis unit is the project, not the organization.

Deposits and incentives are ranked according to priority (importance). At the same time, an important aspect is an attitude of stakeholders to each other, the ability and capability to interact. When developing and compiling the matrix, it is necessary to identify conflict situations between stakeholders, both at the stage of project initiation and in the process of project implementation. After ranking, indicators for each contribution and incentive are determined and this information is recorded. The next stage is to create a database of stakeholders of the project, which will provide an opportunity to systematize information on the importance and role of all stakeholders in the project. Thus, the ASC model can be represented in the stages shown in fig. 3.

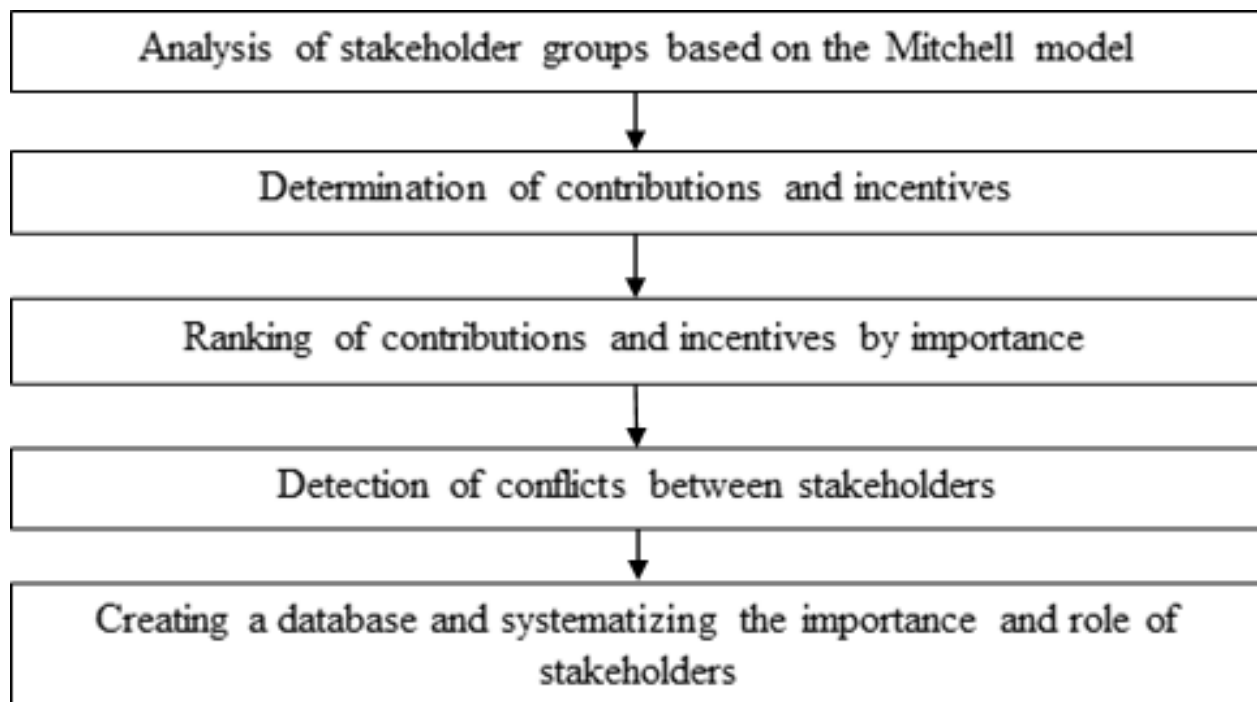


Fig. 3 – Stages of ASC model.

The identification of the organization executing the project and the organization initiating the project (in case of their discrepancy), investors and the definition of their contributions and incentives visualizes the position of stakeholders. When managing stakeholders, it is necessary to take into account the influence of the human factor, the presence of conflict situations between team members and stakeholders.

In some cases, stakeholder management is considered to be a static process. However, since project management is iterative, stakeholder management also needs to be considered in dynamics. In addition, consideration of the time factor in stakeholder management will determine the distribution of contribution and incentive across the life cycle phases [8].

For a certain point in time (the selected control point), a stakeholder interest profile is formed, which is compared with the planned interest profile. Based on the analysis, recommendations for working with stakeholders are developed.

Thus, having analyzed in detail the characteristics of stakeholders, it can be highlighted, that the problem of stakeholders should be regulated at the level, the achievement of which requires the involvement of a particular group of stakeholders. Any activity, either business or industrial, bases on the usage of certain resources. In an unstable and non-equilibrium economy, it is necessary to properly consider all the risks of an innovative project, especially if it is also knowledge-intensive, it is necessary to assess the resources and potentials of its participants. Only by agreeing among themselves and uniting temporarily or permanently in interest groups (research and production clusters), stakeholders have a chance of success of the project.

**Mathematical model.** Consider a model for project management and investors who make strategic decisions [7]. The main criterion of management for the investor is to maximize profits under the specified restrictions in the form of the number of funds and the timing of the project. We introduce the following notations:

$V_i$  – value of investor's resource at the moment of time  $i$  – stage of project lifecycle;  $C_i$  – project costs at the moment of time  $i$  – stage of project lifecycle;  $P_i$  – planned profit at the moment of time  $i$  – stage of project lifecycle;  $T_1, T_2$  – beginning and end of project.

Then the model of the organization of the investment project for the investor will be as follows:

$$P_i \rightarrow \max, \text{ when } T_2 - T_1 = \min \text{ and } C_i \leq V_i. \quad (1)$$

Thus, the task of maximization of profit at minimum time of project and amount of investment greater than or equal to the cost of the project is to be solved. This model helps to achieve the goals of one of the stakeholders, namely investors. To achieve the goals of all parties, it is necessary to consider models for each of the parties, and then group them using Mitchell's model and ranking contributions using the ASC model. It uses four types of technologies that provide functional solutions in the field of innovation management:

- semantic;
- collaboration;

- visual;
- scaling.

Summing up, the improvement of stakeholder management processes of the project is quite relevant in modern conditions, as the influence of stakeholders on the project is growing every year, and it will be a big mistake of the project manager not to take this into account.

**Conclusion.** Establishment of stakeholder groups, the analysis of information technologies as well as the development of a network model is a methodological problem of innovation potential management. Stakeholders' interests should be taken into account at all stages of the company's life cycle. Mitchell's model was identified as the most suitable for accounting the interests of all stakeholders, which together with the ASC model will create a database and systematize the roles of all stakeholders. It was concluded that the problem of stakeholders should be regulated at the level, the achievement of which requires the involvement of a group of stakeholders. When considering mathematical models of the managers and investors of projects the task is to maximize profit with minimal project dates and amount of investment greater than or equal to the cost of the project.

#### Bibliography

1. Freeman R. E. *Strategic Management : a Stakeholder Approach*. – Boston : Pitman, 1984. – 276 p.
2. Сараева И. Н. К проблеме построения стейкхолдерской модели малого бизнеса // Наук. работы ДонНТУ. Серия : Економічна. – 2010. – Випуск 38 – 1. – С. 176 – 180.
3. Mitchell R. K., Agle B. R., Sonnenfeld J. A. Who Matters to CEOs. An Investigation of Stakeholder Attributes and Salience, Corporate Performance and CEO Values // *Academy of Management Journal*. – 1999. – vol. 42. – no. 5. – P. 507 – 525.
4. Nickols F. *The Stakeholder Scorecard : "Keeping Score" regarding Accountability*. – Distance Consulting LLC, 2011. – 9 p.
5. ICB–IPMA Competence Baseline. Version 3.0. IPMA Editorial Committee : Caupin G., Knopf H., Koch G., Pannenbacker K. – IPMA – 2006. – 202 p.
6. Андрианов А. Ю. Стейкхолдеры в социальном партнерстве // Экономика региона : электронный научный журнал. – 2007. No. 18. – Режим доступа : <http://journal.vlsu.ru/index.php?id=1753> – Дата звертання : 13 квітня 2019 р.
7. Voropaev V., Gelrud Ya. Mathematical models of project management for the Investor // *Project and program management*. – 2013. – No. 2. – P. 102 – 112.
8. The Standish Group Report. CHAOS. (Project Smart. 2014). – Режим доступа : URL: <https://www.projectsmart.co.uk/white-papers/chaos-report.pdf>. – Дата звертання : 13 квітня 2019.

#### References (transliterated)

1. Freeman R. E. *Strategic Management : a Stakeholder Approach*. Boston, Pitman, 1984, 276 p.
2. Sarajevo I. N. K probleme postroyeniya steykholderskoy modeli malogo biznesa [To the problem of building a stakeholder model of small business]. *Naukovi pratsi DonNTU. Seriya : Ekonomichna* [Scientific works of the Donetsk National Technical University. Series : Economical]. 2010, issue 38 – 1, pp. 176–180.
3. Mitchell R. K., Agle B. R., Sonnenfeld J. A. Who Matters to CEOs. An Investigation of Stakeholder Attributes and Salience, Corporate Performance and CEO Values. *Academy of Management Journal*. 1999, vol. 42, no. 5, pp. 507–525.
4. Nickols F. *The Stakeholder Scorecard : "Keeping Score" regarding Accountability*. Distance Consulting LLC, 2011. 9 p.
5. ICB–IPMA Competence Baseline. Version 3.0. IPMA Editorial Committee : Caupin G., Knopf H., Koch G., Pannenbacker K. IPMA, 2006, 202 p.
6. Andrianov A. Yu. *Steykholdery v sotsial'nom partnerstve* [Stakeholders in social partnership]. Available at : <http://journal.vlsu.ru/index.php?id=1753> (accessed 13.04.2019).
7. Voropaev V., Gelrud Ya. Mathematical models of project management for the Investor. *Project and program management*. 2013, no. 2, pp. 102–112.
8. *The Standish Group Report. CHAOS*. (Project Smart. 2014). Available at : URL: <https://www.projectsmart.co.uk/white-papers/chaos-report.pdf> (accessed 13.04.2019).

Received (надійшла) 20.04.2019

Information about authors / Відомості про авторів / Сведения об авторах

**Petrova Roxana Vadimovna (Петрова Роксана Вадимівна, Петрова Роксана Вадимовна)** – PhD, Department of Economic Cybernetics and Management of Economic Security, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (067) 775-13-57; e-mail: roksana.petrova@nure.ua.

**Liubicheva Olga Igorivna (Любічева Ольга Ігорівна, Любичева Ольга Игоревна)** – Master's student, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (050) 551-84-76; e-mail: olha.liubicheva@nure.ua.

**Morozova Anna Ivanovna (Морозова Анна Іванівна, Морозова Анна Ивановна)** – Senior Lecturer, Department of Systems Engineering, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (095) 211-81-82; e-mail: anna.morozova@nure.ua.

UDC 517.521.1; 511.26

**I. A. TOKMAKOVA****REPRESENTATION OF REAL NUMBERS BY FIBONACCI SEQUENCE**

The paper deals with imaging of real numbers by the Fibonacci sequence. An algorithm for changing from decimal representation of a number to its  $F$  – image is developed. The application of the algorithm is demonstrated by considering several specific examples. The correlation between binary numbers and numbers given as their  $F$  – images is analyzed.

**Key words:** Fibonacci sequence, recurrence formulae,  $F$  - image of a real number, decimal number system, binary number system.

**I. A. ТОКМАКОВА****ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ З ДОПОМОГОЮ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІБОНАЧЧІ**

У даній роботі описано зображення дійсних чисел за допомогою послідовності Фібоначчі. Запропоновано алгоритм переходу від десяткового представлення числа до  $F$  – зображення. Продемонстровано дію алгоритму на декількох конкретних прикладах. Проаналізовано зв'язок двійкового зображення з  $F$  – зображенням дійсного числа.

**Ключові слова:** послідовність Фібоначчі, рекурентні співвідношення,  $F$  - зображення дійсного числа, десяткова система числення, двійкова система числення.

**И. А. ТОКМАКОВА****ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФИБОНАЧЧИ**

В данной работе описано изображение действительных чисел с помощью последовательности Фибоначчи. Предложен алгоритм перехода от десятичного представления числа к  $F$  – изображению. Работа алгоритма продемонстрирована на нескольких конкретных примерах. Проанализирована связь двоичного и  $F$  – изображения действительного числа.

**Ключевые слова:** последовательность Фибоначчи, рекуррентное соотношение,  $F$  - изображение действительного числа, десятичная система счисления, двоичная система счисления.

**Introduction.** Nowadays a vast diversity of *number representation systems* is used in mathematics and its applications. There are systems exploiting either finite or infinite sets of digits, as well as systems based on a single number or infinite number sequence.

Among the number representation systems the *two-symbol systems* (systems with binary alphabet) are numerous and are supposed to be convenient from the technical point of view. Some of the two-symbol systems are of zero redundancy, like the classical 0–1 based binary system. Hence, the interest to the systems of non-zero redundancy is natural. The systems with comparatively simple geometry are of interest as well since they are more convenient when dealing with mathematical objects of complicated structure, in particular those with fractal properties.

In order to obtain simple and convenient for applications number representation system we propose using the *Fibonacci sequence*, i.e. the sequence which terms starting from the third one equal the sum of the two preceding terms of the same sequence. We consider the representation of real numbers by the number series which terms are reciprocal to the terms of the *Fibonacci series*.

**Analysis of the previous results.** The representations of real numbers using the Fibonacci sequence were studied by mathematicians at different times. In particular, the irrationality of the sum of the number series with terms reciprocal to the *Fibonacci numbers* was studied by M. Prevost [1], the Fibonacci imaging of real numbers and its geometry was discussed by M. V. Pratsovyyty and N. M. Vasylenko [2, 3, 4], the generalized Fibonacci sequences were studied by D. M. Kravatsky [5, 6].

In recent decades the theories of imaging of real numbers using positive or alternating series have been developed by various scientists. Thus imaging of real numbers by the *Ostrogradsky-Serpinsky-Pierce series* were studied in the papers by S. Albeverio, J. V. Baranovsky, M. V. Pratsovyyty, G. M. Torbin [7, 8], the 2-nd kind *Ostrogradsky series* were used by M. V. Pratsovyyty [9], the applications of *Engel expansions* were discussed by M. V. Pratsovyyty and B. I. Getman [10], the *positive Lüroth series* were used by Yu. I. Zhyhkhareva, M. V. Pratsovyyty [11], the *alternating Lüroth series* were considered by S. Kalpazidou, A. Knopfmacher [12], Yu. V. Khvorostina [13].

**Purpose of the paper.** The purpose of the paper is to explore the theoretical knowledge on the transition from  $F$  – image of a real number to its decimal representation and backwards, to develop an algorithm for transiting from the decimal representation of a number to its  $F$  – image, and to study the connection between the binary representation of a number and its  $F$  – image.

**Main results.** Let  $u_0 = 1, \quad u_1 = 1,$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (1)$$

Recurrent formula (1) determines the classical sequence of the Fibonacci numbers. Consider the number series with

the terms reciprocal to the respective Fibonacci numbers (1) (see [14]):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} + \dots \quad (2)$$

Series (2) was studied by different mathematicians (*M. Laisant, P. Erdos and R. L. Graham* [15]); in particular, the French mathematician Mark Prevost proved that the sum of the series is irrational. In 1978 he computed the sum to be approximately equal to 2,35988566.... Due to this fact the sum of series (2) is sometimes referred to as Prevost constant [14].

**Theorem 1. [16].** An arbitrary real number  $x \in [0; S]$ , where  $S = 2,35988566\dots$ , admits the following expansion:

$$x = \sum_{k \in \mathbb{L}} \frac{1}{u_k}, \quad (3)$$

where  $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{N}$ .

*Proof.* Let  $x$  be an arbitrary real number from the interval  $[0; S]$ . If  $x = S$ , then  $\mathbb{L} = \mathbb{N}$  and equality (3) is obviously true.

Let  $0 < x < S$ . Then there exists  $k_1 \in \mathbb{N}$  such that

$$\frac{1}{u_{k_1}} < x < \frac{1}{u_{k_1-1}};$$

and the following inequality holds:

$$0 \leq x - \frac{1}{u_{k_1}} = x_1 < \frac{1}{u_{k_1-1}} - \frac{1}{u_{k_1}}.$$

Hence,

$$x = \frac{1}{u_{k_1}} + x_1, \quad (4)$$

for some  $x_1 \in \left[0; \frac{1}{u_{k_1-1}} - \frac{1}{u_{k_1}}\right)$ . If  $x_1 = 0$ , then  $x = \frac{1}{u_{k_1}}$  and equality (3) is true. If  $x_1 > 0$ , then there exists  $k_2 \in \mathbb{N}$  such that:

$$\frac{1}{u_{k_2}} < x_1 < \frac{1}{u_{k_2-1}},$$

and  $k_2 > k_1$  (since  $x_1 < x$  and the sequence  $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}$  is monotonously decreasing). Then

$$0 \leq x_1 - \frac{1}{u_{k_2}} = x_2 < \frac{1}{u_{k_2-1}} - \frac{1}{u_{k_2}},$$

which implies  $x_1 = \frac{1}{u_{k_2}} + x_2$ , for  $x_2 \in \left[0; \frac{1}{u_{k_2-1}} - \frac{1}{u_{k_2}}\right)$ .

Substituting  $x_1$  in (4) we get

$$x = \frac{1}{u_{k_1}} + \frac{1}{u_{k_2}} + x_2. \quad (5)$$

If  $x_2 = 0$ , then we arrive at (3), which in this case becomes:  $x = \frac{1}{u_{k_1}} + \frac{1}{u_{k_2}}$ .

If  $x_2 > 0$ , then there exists  $k_3 > k_2$ ,  $k_3 \in \mathbb{N}$  such that

$$\frac{1}{u_{k_3}} \leq x_2 < \frac{1}{u_{k_3-1}}.$$

Arguing as above, we compute  $x_3, x_4, \dots$ .

If at some  $n$ -th step we get

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{u_{k_n}} = 0,$$

then expansion (3) has finite number of non-zero term:



$$x = \frac{1}{u_{k_1}} + \frac{1}{u_{k_2}} + \dots + \frac{1}{u_{k_n}}.$$

In case there is no such integer  $n$  for which  $x_n = 0$ , then

$$0 < x_n = x_{n-1} - \frac{1}{u_{k_n}} < \frac{1}{u_{k_{n-1}}} - \frac{1}{u_{k_n}},$$

and there is  $k_{n+1} > k_n$ ,  $k_{n+1} \in \mathbb{N}$  such that

$$\frac{1}{u_{k_{n+1}}} \leq x_n < \frac{1}{u_{k_{n+1}-1}}.$$

Hence,

$$0 \leq x_n - \frac{1}{u_{k_{n+1}}} = x_{n+1} < \frac{1}{u_{k_{n+1}-1}} - \frac{1}{u_{k_{n+1}}}$$

and

$$x = \frac{1}{u_{k_1}} + \frac{1}{u_{k_2}} + \dots + \frac{1}{u_{k_{n+1}}} + x_{n+1}.$$

Since  $\frac{1}{u_{k_{n+1}-1}} - \frac{1}{u_{k_{n+1}}} \rightarrow 0$ , then  $x_{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . Thus Theorem 1 is proved.

*Corollary. [4].* For an arbitrary  $x \in [0; S]$  there exists a sequence  $\{f_k\}$ ,  $f_k \in \{0, 1\}$  such that

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} = \frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} + \dots + \frac{f_k}{u_k} + \dots \quad (6)$$

**Lemma 1. [16].** Given a sequence  $\{f_k\}$ ,  $f_k \in \{0, 1\}$ , the series  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k}$  converges to a number  $x \in [0; S]$ .

The statement of Lemma 1 follows from the inequality:

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0}{u_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k} = S,$$

where  $f_k \in \{0, 1\}$ .

**Definition 1.** The  $F$  – representation (or  $F$  – expansion) of a number  $x \in [0; S]$  is the representation of the number  $x$  be the series:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k}, \quad f_k \in \{0, 1\}. \quad (7)$$

Here and below the symbol:

$$x = \Delta_{f_1 \dots f_k \dots}^F \quad (8)$$

is used to denote the  $F$  – expansion of the number  $x$ .  $\Delta_{f_1 \dots f_k \dots}^F$  is also referred to as an  $F$  – image of  $x$ , the number  $f_k$  is called the  $k$  – th number of the  $F$  – image of  $x$ .

Lemma 1 suggests the algorithm of transiting from the  $F$  – image of a real number to its decimal representation. The natural problem which thus arises is the one of the backwards transition: from the decimal representation to the  $F$  – image. That is why we now deal with developing an algorithm of constructing an  $F$  – image of a real number given its decimal representation.

Using the corollary of Theorem 1 and Lemma 1, we transit from the  $F$  – image of a real number to its decimal representation.

The corollary of Theorem 1 implies that

$$x = \frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} + \dots + \frac{f_k}{u_k} + \dots = \Delta_{f_1 \dots f_k \dots}^F,$$

$$f_k \in \{0, 1\}, f_1 = 0, x \in [0; S], \text{ with } S = 1,35988566\dots,$$

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, \dots, u_k = u_{k-1} + u_{k-2}, k \geq 3.$$

**Example 1.** Find the decimal representation of the number  $x = \Delta_{0011(0)}^F$ .

By the definition of the  $F$  – image of a real number (7) we write:

$$x = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 + \dots + 0 = \frac{5}{6} = 0,8(3).$$

Thus  $x = \Delta_{0011(0)}^F = 0,8(3)$ .

Until recently no recurrent algorithm for trasiting from decimal representation of a number to its  $F$  – image existed. We describe it below.

Let  $x$  be an arbitrary real number from the interval  $[0; S]$  and

$$f_1 = [x], \quad x_1 = x - f_1,$$

where  $[x]$  stands for the integer part of  $x$ , i.e. the greatest integer less than or equal to  $x$ .

We set by recurrence:

$$f_{n+1} = [u_{n+1}x_n], \quad x_{n+1} = (u_{n+1}x_n - f_{n+1}) \frac{1}{u_{n+1}}.$$

The termination step of the algorithm is when  $x_n = 0$ , it is infinite otherwise.

*Example 2.* Find the  $F$  – image of the decimal number  $x = 0,8(3)$ .

$$f_1 = [0,8(3)] = 0, \quad x_1 = 0,8(3) - 0 = 0,8(3);$$

$$f_2 = [2 \cdot 0,8(3)] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{5}{6} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{3}\right] = 1, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) \frac{1}{3} = 0.$$

Hence,  $x = 0,8(3) = \Delta_{011(0)}^F$ .

*Example 3.* Find the  $F$  – image of the decimal number  $x = 0,7$ .

$$f_1 = [0,7] = 0, \quad x_1 = 0,7 - 0 = 0,7;$$

$$f_2 = [2 \cdot 0,7] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{7}{10} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{5};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{5}\right] = 0, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{5} - 0\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{5};$$

$$f_4 = \left[5 \cdot \frac{1}{5}\right] = 1, \quad x_4 = \left(5 \cdot \frac{1}{5} - 1\right) \frac{1}{5} = 0;$$

Hence,  $x = 0,7_{10} = \Delta_{0101}^F$ .

When applying the algorithm for finding an  $F$  – image of a real number it is not always possible to get the  $F$  – image with the least number of terms.

*Example 4.* Find the  $F$  – image of the number  $x = \frac{8}{15}$ .

$$f_1 = \left[\frac{8}{15}\right] = 0, \quad x_1 = \frac{8}{15} - 0 = \frac{8}{15};$$

$$f_2 = \left[2 \cdot \frac{8}{15}\right] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{8}{15} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{30};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{30} - 0\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{30};$$

$$f_4 = \left[5 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_4 = \left(5 \cdot \frac{1}{30} - 0\right) \frac{1}{5} = \frac{1}{30};$$

$$f_5 = \left[8 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_5 = \left(8 \cdot \frac{1}{30} - 0\right) \frac{1}{8} = \frac{1}{30};$$

$$f_6 = \left[13 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_6 = \left(13 \cdot \frac{1}{30} - 0\right) \frac{1}{13} = \frac{1}{30};$$

$$f_7 = \left[ 21 \cdot \frac{1}{30} \right] = 0, \quad x_7 = \left( 21 \cdot \frac{1}{30} - 0 \right) \frac{1}{21} = \frac{1}{30};$$

$$f_8 = \left[ 34 \cdot \frac{1}{30} \right] = 1, \quad x_8 = \left( 34 \cdot \frac{1}{30} - 1 \right) \frac{1}{34} = \frac{1}{255};$$

$$\dots$$

$$x = \frac{8}{15} = \Delta_{0100000100001\dots}^F.$$

On the other hand the number  $\Delta_{0011}^F$  also equals  $\frac{8}{15}$  since

$$\Delta_{0011}^F \equiv \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

Nevertheless, this representation has less term than the one obtained by the algorithm (see Example 4).

Let us compare now the binary representation of a number with its  $F$  – image.

**Lemma 2. [4].** Given a fixed sequence of zeroes and ones  $(c_n)$  we have

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^F > \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2.$$

*Proof.* Apparently any sequence of zeroes and ones determines two numbers (possibly different) one of which is given in its binary representation and another one as its  $F$  – image. Let  $x$  and  $y$  be two such numbers:

$$x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^F, \quad y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2.$$

By the definitions of these representations we have:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{u_n}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}.$$

Thus for all  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{c_n}{u_n} > \frac{c_n}{2^n}.$$

Hence,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{u_n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$ . The equality is possible only if  $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Lemma 2 is now proved.

**Lemma 3.** Given a fixed sequence of zeroes and ones  $(c_n)$  we have

$$\Delta_{0c_1 c_2 \dots c_n \dots}^F \geq \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2.$$

*Proof.* Let  $x$  and  $y$  be two real numbers such that:

$$x = \Delta_{0c_1 c_2 \dots c_n \dots}^F, \quad y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2.$$

By the definition of the binary and  $F$  – representation of a real number we have:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{u_n}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}.$$

Noting that  $u_2 = 2, u_3 < 2^2, \dots, u_{n+1} < 2^n, \dots$  we deduce that for all numbers  $n \in \mathbb{N}$  the following estimate holds:

$$\frac{c_n}{u_n} \geq \frac{c_n}{2^n}.$$

Hence,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{u_n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$ . The equality is possible only in the case  $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , or  $c_1 = 1, c_n = 0, \forall n \geq 2$ . Lemma 3 is thus proved.

Let  $x = \Delta_{0c_1 c_2 \dots c_n \beta}^F, y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \alpha}^2$ .

**Theorem 2. [3].** Assume

$$x_1 = \Delta_{0c_1 \beta}^F, \quad x_2 = \Delta_{0c_1 c_2 \beta}^F, \quad \text{and} \quad y_1 = \Delta_{c_1 \alpha}^2, \quad y_2 = \Delta_{c_1 c_2 \alpha}^2. \quad (9)$$

Then  $x_i > y_i$  for  $\alpha \leq \beta$ , and  $x_i < y_i$  for  $\alpha > \beta, \forall i \in \{1, 2\}$ .

*Proof.* From Lemma 3 it follows that if  $\alpha \leq \beta$  in (9) then  $x_i > y_i, \forall i \in \{1, 2\}$ . Consider the case  $\alpha > \beta$ , which is only possible if  $\alpha = 1, \beta = 0$ . Then

1)  $x_1 = \frac{c_1}{2}, y_1 = \frac{c_1}{2} + \frac{1}{4}$  and  $x_1 < y_1, \forall c_1 \in \{0, 1\}$ , which is obvious;

$$2) \quad x_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3}, \quad y_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{1}{8} \quad \text{and since} \quad \frac{8c_2}{24} < \frac{6c_2+3}{24}, \quad \forall c_1, c_2 \in \{0, 1\}, \quad \text{then} \quad x_2 < y_2.$$

Thus Theorem 2 is proved.

**Conclusions.** In the paper the examples of transferring from the  $F$  – image of a real number to its decimal representation are presented. The algorithm for transferring from the decimal to  $F$  – representation of a real number is developed. Several examples of the algorithm applications are proposed. The correlation between binary numbers and numbers given as their  $F$  – images is analyzed.

#### Bibliography

1. Matala-aho T., Prevost M. Irrationality measures for the series of reciprocals from recurrence sequences // *Journal of Number Theory*. – 2002. – Vol. 96. – No 2. – P. 275 – 292.
2. Працьовитий М. В., Василенко Н. М. Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. – 2008. – № 9. – С. 171 – 181.
3. Василенко Н. М. Деякі метричні співвідношення, породжені  $\Phi$ -зображенням дійсних чисел // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки*. – 2006. – № 7. – С. 192 – 194.
4. Василенко Н. М. Фібоначчйове подання дійсних чисел // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки*. – 2007. – № 2. – С. 1 – 12.
5. Карвацький Д. М., Василенко Н. М. Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. – 2012. – Т. 13. – № 1. – С. 118 – 127.
6. Карвацький Д. М. Про один клас узагальнених послідовностей Фібоначчі та ряди, що з ними пов'язані // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. – 2015. – Т. 17. – № 1. – С. 186 – 201.
7. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. – 2004. – Vol. 24. – No 1. – P. 1 – 16.
8. Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // *Укр. мат. журн.* – 2007. – Т. 59. – № 9. – С. 1155 – 1168.
9. Працьовита І. М. Про розклади чисел в знакозмінні  $s$ -адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду // *Укр. мат. журн.* – 2009. – Т. 61. – № 7. – С. 958 – 968.
10. Працьовитий М. В., Гетьман Б. І. Ряди Енгеля та їх застосування // *Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки*. – 2006. – № 7. – С. 105 – 116.
11. Жихарєва Ю. І., Працьовитий М. В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота : основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // *Наук. часоп. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки*. – 2008. – № 9. – С. 200 – 211.
12. Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Metric properties of alternating Lüroth series // *Portugal. Math.* – 1991. – Vol. 48. – No 3. – P. 319 – 325.
13. Хворостіна Ю. В. Концептуальні основи дослідження розподілів випадкових величин, пов'язаних зі знакозмінними рядами Люрота // *Фізико-математична освіта*. – 2015. – Вип. 2. – С. 73 – 81. – Режим доступу : [http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo\\_2015\\_2\\_11](http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_11). – Дата звертання : 12 квітня 2019.
14. Numerical constants. – Режим доступу : <http://www.numericana.com/answer/constants.htm>. – Дата звертання : 12 травня 2019.
15. Erdős P., Graham R. Old and new problems and results in combinatorial number theory – Geneve : Monographies de l'EnseignementMath, 1980. – No. 28. – 128 p.
16. Працьовитий М. В. Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел // *Студентські фізико-математичні етюди*. – 2010. – № 9. – С. 6 – 16.

#### References (transliterated)

1. Matala-aho T., Prevost M. Irrationality measures for the series of reciprocals from recurrence sequences. *Journal of Number Theory*. 2002, vol. 96, no. 2, pp. 275–292.
2. Prats'ovytyy M. V., Vasylenko N. M. Matematychni struktury v prostori poslidovnostey Fibonachchi [Mathematical structures in Fibonacci sequence space]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2008, no. 9, pp. 171–181.
3. Vasylenko N. M. Deyaki metrychni spivvidnoshennya, porodzeni  $\Phi$ -zobrazhenniam diysnykh chysel [Some metric relations generated by  $\Phi$  – images of specific numbers]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2006, no. 7, pp. 192–194.
4. Vasylenko N. M. Fibonachchiyve podannya diysnykh chysel [Fibonacci representation of some specific numbers]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2007, no. 2, pp. 1–12.
5. Karvats'ky D. M., Vasylenko N. M. Matematychni struktury u prostorakh uzagal'nykh poslidovnostey Fibonachchi [Mathematical structures in Fibonacci generalized sequence space]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2012, vol. 13, no. 1, pp. 118–127.
6. Karvats'ky D. M. Pro odyn klas uzahal'nykh poslidovnostey Fibonachchi ta ryady, shcho z nymy pov'yazani [On a class of generalized Fibonacci sequences and associated series]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2015, vol. 17, no. 1, pp. 186–201.
7. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–16.
8. Baranovs'ky O. M., Prats'ovytyy M. V., Torbin H. M. Topoloho-metrychni vlastyvyosti mnozhyn diysnykh chysel z umovamy na yikh rozklady v ryady Ostrohrads'koho [Topological and metric properties of sets of real numbers with conditions on their Ostrogradsky series expansion]. *Ukr. mat. Zhurn* [Ukrainian Mathematical Journal]. 2007, vol. 59, no. 9, pp. 1155–1168.
9. Prats'ovytyy M. V. Pro rozklady chysel v znakozminni  $s$ -adychni ryady i ryady Ostrohrads'koho 1-go ta 2-go vydu [On expansion of numbers into alternating  $s$ -adic series and 1-st and 2-nd kind Ostrogradsky series]. *Ukr. mat. Zhurn* [Ukrainian Mathematical Journal]. 2009, vol. 61, no. 7, pp. 958–968.
10. Prats'ovytyy M. V., Get'man B. I. Ryady Enhelya ta yikh zastosuvannya [Engel series and their applications]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky*. [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2006, no. 7, pp. 105–116.
11. Zhykharyeva Yu. I., Prats'ovytyy M. V. Zobrazhennya chysel znakododatnyimi ryadamy Lyurota : osnovy topoloho-metrychnoyi, fraktal'noyi i

- ymovirnisnoyi teorii [Imaging of numbers by positive Lüroth series: fundamentals of topological and metric, fractal, and probability theories]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2008, no. 9, pp. 200–211.
12. Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Metric properties of alternating Lüroth series. *Portugal. Math.* 1991, vol. 48, no. 3, pp. 319–325.
13. Khvorostina Yu. V. Kontseptual'ni osnovy doslidzhennya rozpodiliv vypadkovykh velychyn, pov'yazanykh zi znakovminnymy ryadamy Lyurota [Conceptual bases of studying distribution of random variables associated with alternating Lüroth series]. *Fyzyko-matematychna osvita* [Physical and Mathematical Education]. 2015, issue. 2, pp. 73–81. – Available at : [http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo\\_2015\\_2\\_11](http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_11) (accessed : 12.05.19)
14. Numerical constants. – Available at : <http://www.numericana.com/answer/constants.htm> (accessed : 12.04.19).
15. Erdős P., Graham R. *Old and new problems and results in combinatorial number theory*. Geneve : Monographies de l'EnseignementMath, 1980, no. 28. 128 p.
16. Prats'ovyytyy M. V. Dvosymvol'ni systemy zobrazhennya (koduвання) diysnykh chysel [Two-symbol representation systems (coding) of real numbers] *Students'ki fyzyko-matematychni etyudy* [Students' sketches in physics and mathematics]. 2010, no. 9, pp. 6–16.

Received (надійшла) 17.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna)** – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: [irina777111@ukr.net](mailto:irina777111@ukr.net).

УДК 519.6

**N. V. CHEREMSKAYA**

### DEPENDENCE OF PROGNOSIS AND FILTRATION FAILURE ON DIFFERENT VALUES OF PARAMETERS FOR SOME CLASSES OF NON-STATIONARY RANDOM SEQUENCES

The article continues the study of estimates of random functions at a future moment of time, linear with respect to the values of pre-histories of processes. The article considers the dependence of the mean square of the forecast error of a random sequence on the last value at different values of the parameters. For non-stationary random sequences, even with correlation functions of the simplest form, such studies haven't been conducted. To obtain representations of correlation functions, a Hilbert approach is used to calculate correlation functions as scalar products in the corresponding Hilbert space. Investigations of the dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value at various values of the parameters discussed in the article can be used to simulate filtration and prognosis processes in real systems in the case of non-stationary random signals.

**Key words:** correlation function, mathematical expectation, prognosis and filtering of non-stationary random sequences and processes, mean square error.

**Н. В. ЧЕРЕМСЬКА**

### ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОМИЛКИ ПРОГНОЗУ І ФІЛЬТРАЦІЇ ВІД РІЗНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Продовжуються дослідження оцінок випадкових функцій в майбутній момент часу, лінійних відносно значень передісторій процесів. У статті розглядається залежність середнього квадрату помилки прогнозу випадкової послідовності за останнім значенням при різних значеннях параметрів. Для нестационарних випадкових послідовностей, навіть з кореляційними функціями найпростішого вигляду, такі дослідження не проводились. Для отримання зображень кореляційних функцій використовується гільбертів підхід, який дозволяє обчислювати кореляційні функції як скалярні добутки у відповідному гільбертовому просторі. Дослідження залежності середнього квадрату помилки прогнозу випадкової послідовності за останнім значенням при різних значеннях параметрів, яка була розглянута в статті, може бути використано для моделювання процесів фільтрації та прогнозу в реальних системах у випадку нестационарних випадкових сигналів.

**Ключові слова:** кореляційна функція, математичне очікування, прогноз та фільтрація нестационарних випадкових послідовностей і процесів, середня квадратична помилка.

**Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ**

### ЗАВИСИМОСТЬ ОШИБКИ ПРОГНОЗА И ФИЛЬТРАЦИИ ОТ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Продолжается исследование оценок случайных функций в будущий момент времени, линейных относительно значений предисторий процессов. В статье рассматривается зависимость среднего квадрата ошибки прогноза случайной последовательности по последнему значению при различных значениях параметров. Для нестационарных случайных последовательностей, даже с корреляционными функциями простейшего вида, такие исследования не проводились. Для получения представлений корреляционных функций используется гильбертов подход, позволяющий вычислять корреляционные функции как скалярные произведения в соответствующем гильбертовом пространстве. Исследование зависимости среднего квадрата ошибки прогноза случайной последовательности по последнему значению при различных значениях параметров, рассмотренное в статье, может быть использовано для моделирования процессов фильтрации и прогноза в реальных системах в случае нестационарных случайных сигналов.

**Ключевые слова:** корреляционная функция, математическое ожидание, прогноз и фильтрация нестационарных случайных последовательностей и процессов, средняя квадратическая ошибка.

**Introduction.** The tasks of predicting the values of random processes (sequences) for known values in the past or the allocation of a signal on the background of random noise are partial but very important tasks of the general theory of linear transformations of a random signal. Solving the extrapolation problem with partial views of the correlation func-

tion, which is calculated for various cases of the spectrum of a non-self-directed bounded operator  $A$ , can be used for modeling the filtration processes and prognosis in real systems in the case of non-stationary random signals.

**Analysis of recent research.** A large number of articles [1, 2, 3, 7 – 10] deal with the prognosis and filtering of non-stationary random sequences. These articles mainly consider the prognosis and filtering of stationary random sequences on the basis of the theory of functions of a complex variable and some classes of functional spaces, or by the approach proposed by *Kalman*, which leads to a rather complicated recurrence procedure. Construction of the optimal filter by a finite number of random sequence values encounters significant difficulties associated with the need to calculate explicit determinants of the  $n$ -th order of a special form. Therefore, the complexity of such calculations and the bulkiness of explicit formulas did not contribute to a significant advance in solving this problem. Researches carried out in [5, 6, 7] allow us to construct simple prognostic algorithms for non-stationary random functions.

**Formulation of the problem.** The article continues the study of evaluations of random functions at a future time point, linear in the values of the prehistory of processes. In the article the dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value is considered at various values of parameters. For non-stationary random sequences, even with the correlation functions of the simplest form, such researches haven't been conducted.

**Mathematical model.** In article [11] the mean square of the prognosis error of a random sequence by the last value is obtained, which is zero order extrapolation:  $\hat{\xi}(n+\theta) = \xi(n)$ . The mean square of the error  $\sigma^2$  in this case has the form:

$$\sigma^2(n, \theta) = Me^2 = K(n+\theta, n+\theta) - 2K(n+\theta, n) + K(n, n), \quad (1)$$

where  $K(n, m)$  is the correlation function of the random sequence.

Let us consider a non-stationary random sequence with a spectrum that consists of one point of the complex plane  $\lambda_1$ ,  $|\lambda_1| < 1$ . This is the case of non-stationary dissipative random sequence [12]. Then  $K(n, m) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi(n+\tau) \overline{\Phi(m+\tau)}$ , where  $\Phi(n) = C\Lambda_1(n)$ , and

$$\Lambda_1(n) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{1-|\lambda_1|^2} \oint_{\gamma} \frac{\lambda^n}{\lambda - \lambda_1} d\lambda = \sqrt{1-|\lambda_1|^2} \lambda_1^n.$$

By skipping simple calculations for  $K(n, m)$ , we get the expression:

$$K(n, m) = |C|^2 (1+|\lambda_1|) \lambda_1^n \overline{\lambda_1^m}. \quad (2)$$

Another image for  $K(n, m)$  can be obtained by using the trigonometric form of a complex number  $\lambda_1$ :  $\lambda_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $r_1 < 1$ :

$$K(n, m) = |C|^2 (1+r_1) r_1^{n+m} (\cos(n-m)\varphi_1 + i \sin(n-m)\varphi_1). \quad (3)$$

If we take advantage of the fact that  $\operatorname{Re} K(n, m) = K_1(n, m)$  is also a correlation function [14], then we obtain from (3):

$$K_1(n, m) = |C|^2 (1+r_1) r_1^{n+m} \cos(n-m)\varphi_1. \quad (4)$$

Formula (4) is an image for the correlation function of a non-stationary dissipative  $\left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(n+\tau, m+\tau) = 0\right)$  random sequence. In this case, the prognosis error (1) takes the form:

$$\sigma^2(n, \theta) = |C|^2 (1+r_1) r_1^{2n} (r_1^{2\theta} - 2r_1^\theta \cos \theta \varphi_1 + 1). \quad (5)$$

From (5) we have that  $\sigma^2(n, 0) = 0$  for  $\theta = 0$ , and  $\sigma^2(n, \infty) = |C|^2 (1+r_1) r_1^{2n}$  for  $\theta = \infty$ . That is, as in the general case, for  $\theta = \infty$  the error of the prognosis depends on the last moment of time and is not constant, as in the case of stationary random sequences. However, with  $n \rightarrow \infty$   $\sigma^2(n, \infty) \rightarrow 0$ .

Consider the dependence of the prognosis error (5) with different values of the parameters assuming  $|C|^2 = 1$ .

The graphs for the dependence of the prognosis error (5) on  $r_1$  are shown in fig. 1, fig. 2, fig. 3.

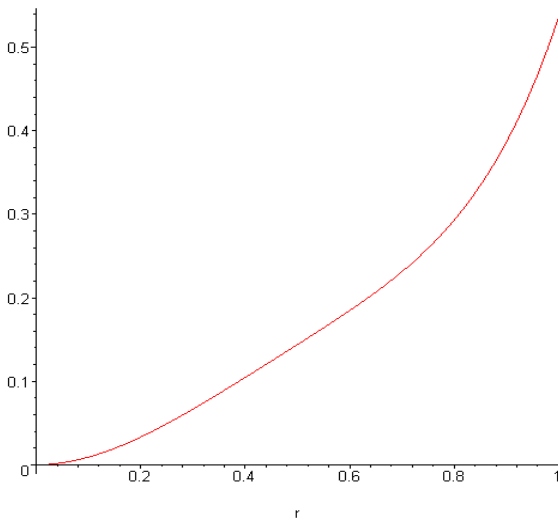


Fig. 1 – Dependence of prognosis error (5) on  $r_1$  at  $n=1$ ,  $\theta=1$ ,  $\varphi_1=0$ .

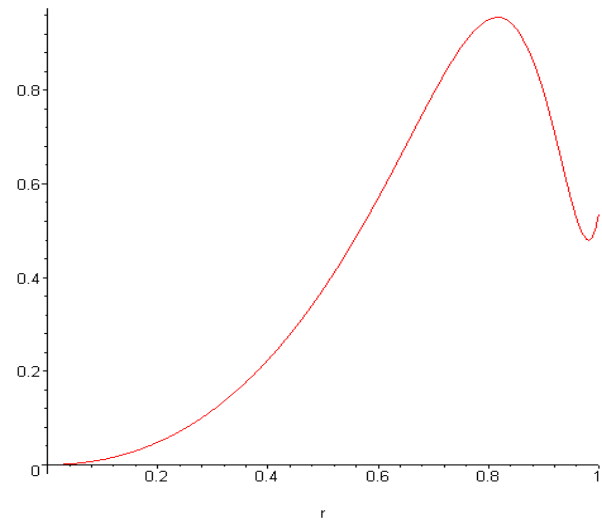


Fig. 2 – Dependence of prognosis error (5) on  $r_1$  at  $n=1$ ,  $\theta=10$ ,  $\varphi_1=0$ .

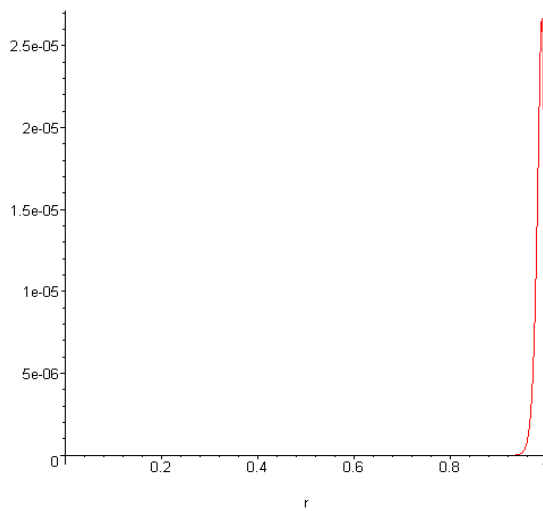


Fig. 3 – Dependence of prognosis error (5) on  $r_1$  at  $n=100$ ,  $\theta=1$ ,  $\varphi_1=0$ .

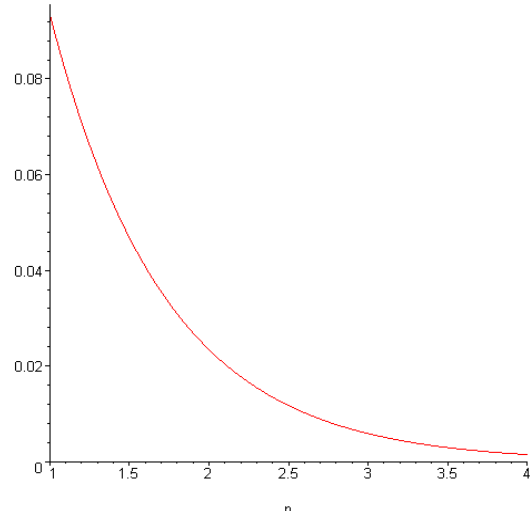


Fig. 4 – Dependence of prognosis error (5) on  $n$  at  $r=0.5$ ,  $\theta=1$ ,  $\varphi_1=0$ .

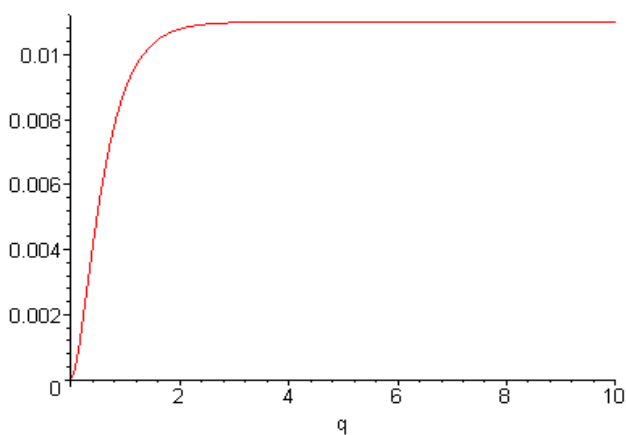


Fig. 5 – Dependence of prognosis error (5) on  $\theta$  at  $r=0.1$ ,  $n=1$ ,  $\varphi_1=0$ .

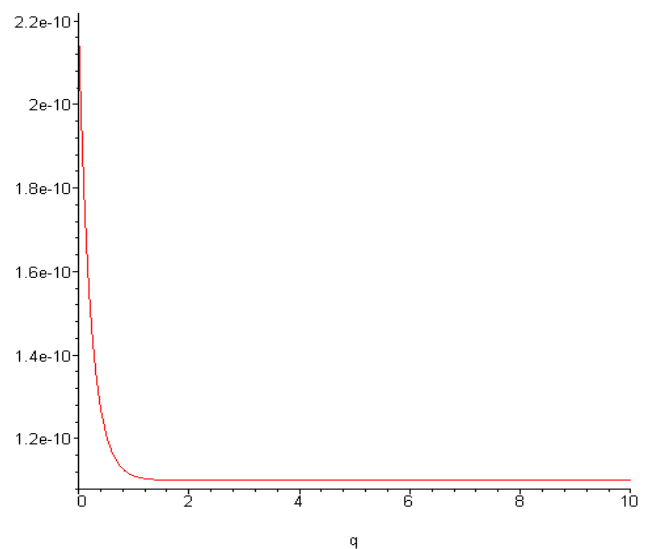


Fig. 6 – Dependence of prognosis error (5) on  $\theta$  at  $r=0.1$ ,  $n=5$ ,  $\varphi_1=\pi/2$ .

The dependence on  $n$  of expression (5) at different values of other parameters has virtually the same character. The graph of this dependence is shown in fig. 4

The dependence on the stage of the prognosis  $\theta$  significantly changes with different parameters. The graph of this dependence is shown in fig. 5 – 8.

We now discuss an example of a prognosis by the last value of a non-stationary random process. Let  $\xi(t)$  be dissipative random process of the first rank non-stationarity with a discrete complex spectrum [12].

Consider the case when the spectrum consists of one point  $\{\lambda_1\} = \left\{ \alpha_1 + i \frac{\beta_1^2}{2} \right\}$ .

Then  $K(t, s) = \int_0^\infty \Phi(t+\tau) \overline{\Phi(s+\tau)} d\tau$ ,  $\Phi(t) = C_1 e^{i\lambda_1 t}$ . It's easy to get an expression for  $K(t, s)$ :

$$K(t, s) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{i\alpha_1(t-s) - \frac{\beta_1^2}{2}(t+s)}, \quad (6)$$

and that means,

$$K_1(t, s) = \operatorname{Re} K(t, s) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\frac{\beta_1^2}{2}(t+s)} \cos \alpha_1(t-s).$$

The mean square of error (1) takes the form

$$\sigma^2(t, \theta) = M e^2 = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\beta_1^2 t} \left( e^{-\beta_1^2 \theta} - 2e^{-\frac{\beta_1^2}{2}\theta} \cos \alpha_1 \theta + 1 \right). \quad (7)$$

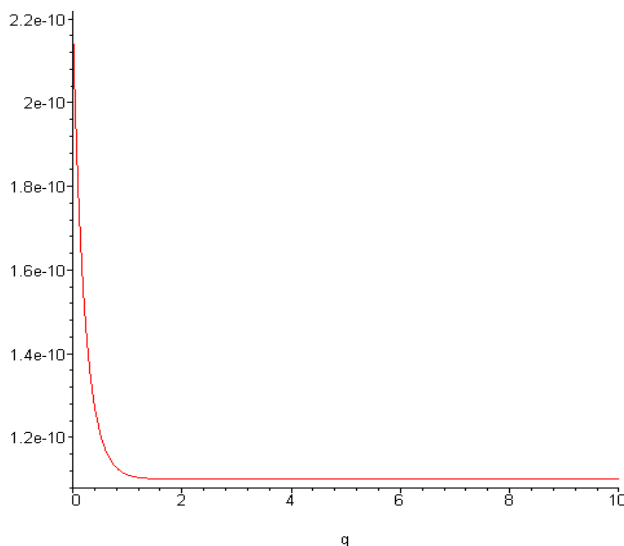


Fig. 7 – Dependence of prognosis error (5) on  $\theta$  at  $r = 0.1$ ,  $n = 10$ ,  $\varphi_1 = \pi/3$ .

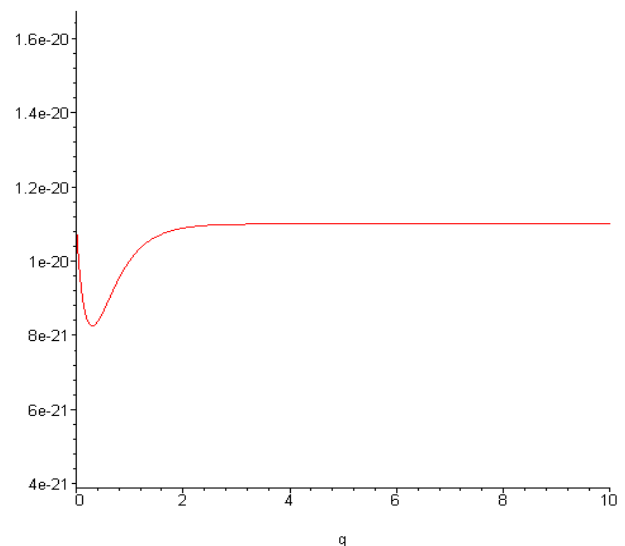


Fig. 8 – Dependence of prognosis error (5) on  $\theta$  at  $r = 0.1$ ,  $n = 5$ ,  $\varphi_1 = \pi/2$ .

From here  $\sigma^2(t, 0) = 0$ , and  $\sigma^2(t, +\infty) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\beta_1^2 t}$ , that is at  $\theta = \infty$  the prognosis error depends on the last moment of time. At  $t \rightarrow \infty$   $\sigma^2(t, +\infty) \rightarrow 0$ , because the multiplier  $e^{-\beta_1^2 t}$  is nonnegative and does not depend on  $t$   $\sigma^2(t, 0) = 0$ .

Consider the dependence of the mean squared error (7) on various parameters, assuming that  $|C_1|^2 = 1$ . We carry out an asymptotic analysis of this formula for  $r \rightarrow 1-0$  and  $r \rightarrow 0$  ( $|r| < 1$ ). Let  $\theta = 1$ ,  $\beta_1^2 = 1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $t = 1$ .

Then expression (7) takes the form:  $\sigma^2(t, \theta) = \frac{1}{1-\varepsilon} e^{\varepsilon-1} \left( e^{\varepsilon-1} - 2e^{-\frac{\varepsilon-1}{2}} \cos \alpha_1 + 1 \right)$ . After simple transformations we get

$$\sigma^2(t, \theta) = e^{-2} - 2e^{-\frac{3}{2}} \cos \alpha_1 + e^{-1} + \varepsilon \left( 3e^{-2} - 5e^{-\frac{3}{2}} \cos \alpha_1 + 2e^{-1} \right). \quad (8)$$



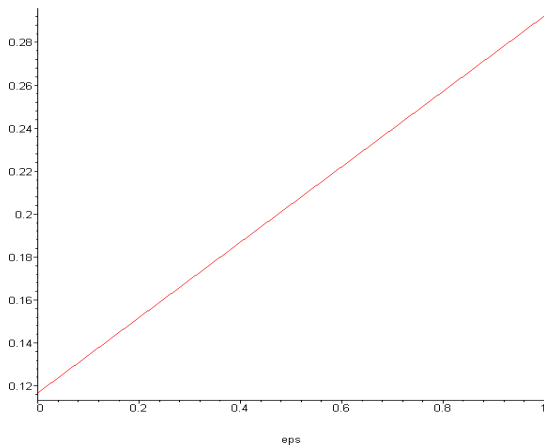


Fig. 9 – Dependence of average square error (8) on  $\varepsilon$  at  $\alpha_1 = \pi/6$ .

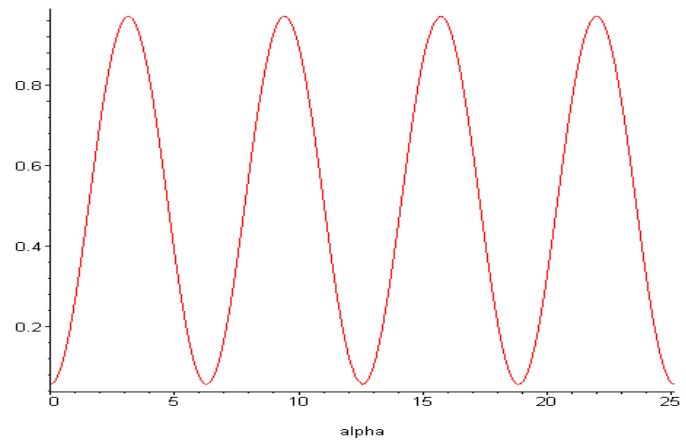


Fig. 10 – Dependence of average square error (8) on  $\alpha_1$  at  $\varepsilon = 0.01$ .

The dependence of the mean square of error (8) on  $\varepsilon$  is linear (fig. 9).

The graphs of dependence mean squared error (8) on  $\alpha_1$  differ from each other only by amplitude. The amplitude grows with  $\varepsilon$  (fig. 10).

Similarly, we consider the asymptotic behavior for small  $\beta_1^2$ .

After simple transformations we get  $\sigma^2(t, \theta) = \frac{2(1 - \cos \alpha_1)}{\beta_1^2} + (3 \cos \alpha_1 - 2)$ . Considering the dependence of this expression on  $\beta_1^2$  at different values of the angle  $\alpha_1$  we have actually the same graphs (fig. 11).

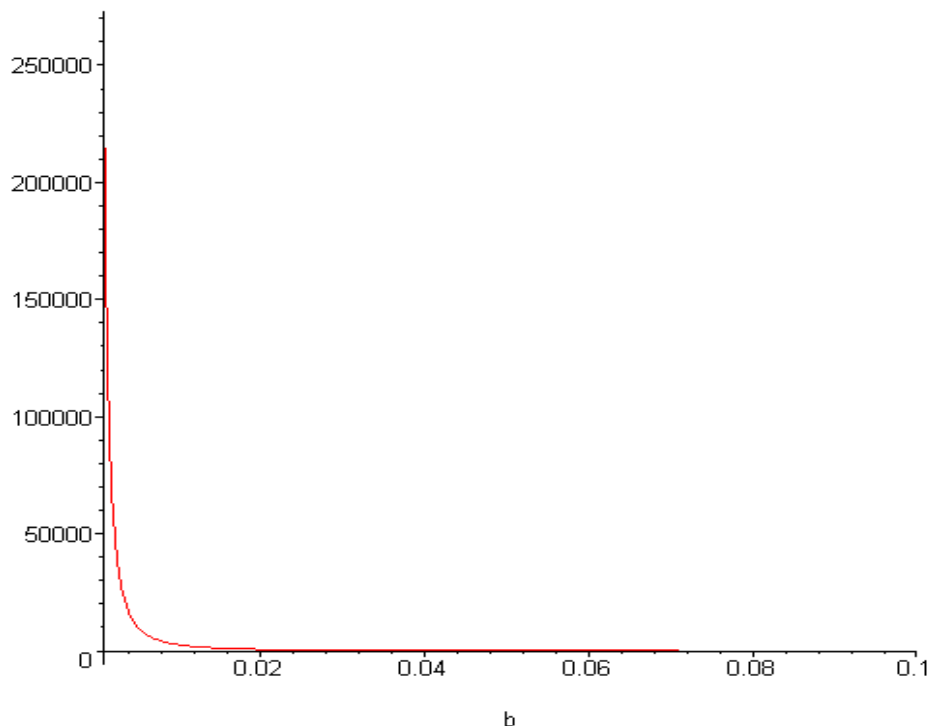


Fig. 11 – Dependence of  $\sigma^2(t, \theta) = \frac{2(1 - \cos \alpha_1)}{\beta_1^2} + (3 \cos \alpha_1 - 2)$  on  $\beta_1^2$  at  $\alpha_1 = \pi/6$ .

The graphs of the dependence of this expression on  $\alpha_1$  differ from each other only by amplitude. The amplitude decreases as  $\beta_1^2$  grows. For example, the graph for  $\beta_1^2 = 0.001$  is shown in fig. 12.

As in the case of the sequence considered above, when  $\theta = 0$  the error is zero, when  $t \rightarrow \infty$  the error monotonically goes to zero, and at  $\theta \rightarrow 0$  it goes to zero as well, but oscillates. More general extrapolation formulas for non-stationary random sequences are obtained in [13].

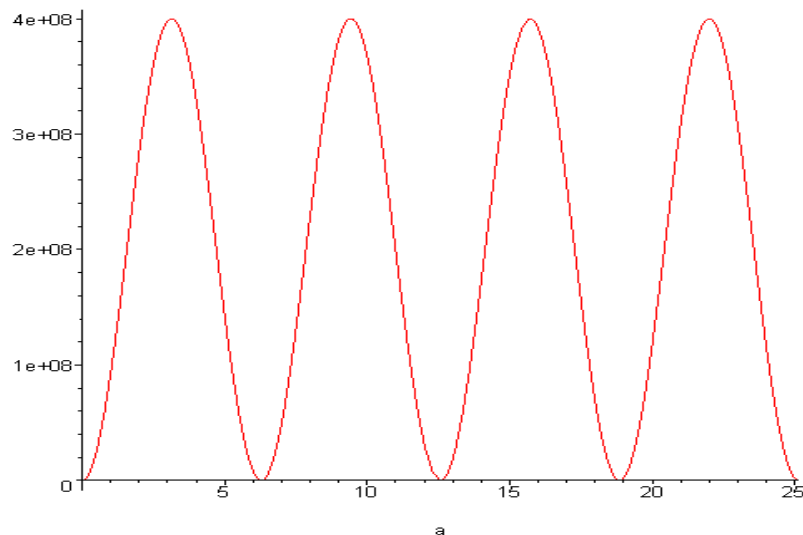


Fig. 12 – Dependence of  $\sigma^2(t, \theta) = \frac{2(1 - \cos \alpha_1)}{\beta_1^2} + (3 \cos \alpha_1 - 2)$  on  $\alpha_1$  at  $\beta_1^2 = 0.001$ .

**Conclusions.** Thus, unlike in the case of stationary signals, the mean square prediction error depends not only on the prediction step, but also on the last moment of time. In addition, for asymptotically fading signals, the error goes to zero, and for the increasing ones – to the infinity. The dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value at different values of parameters, which is considered in the article, can be used for the analysis of statistically non-stationary signals. This is promising in solving many applications, for which the unsteadiness of the data is significant.

#### Bibliography

1. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. – Том 1. – Вып. 5 (51). – С. 3 – 168.
2. Jazwinski A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. – New York and London : Academic Press, 1970. – 376 p.
3. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М. : Энергия, 1973. – 440 с.
4. Шаронова Н. В., Черемская Н. В. Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета. – 2004. – № 1 (19). – С. 343 – 348.
5. Черемская Н. В. Последовательности в гильбертовом пространстве бесконечного ранга нестационарности // Вісник Харківського університету. Сер. : Математика, прикладна математика і механіка. – 1999. – № 444. – С. 157 – 161.
6. Черемская Н. В. Об одном классе нестационарных случайных последовательностей // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научн. тр. Сер. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков, 2003. – № 18. – С. 122 – 130.
7. Козуляев П. А. К вопросу об экстраполяции стационарных процессов // Доклады Академии Наук СССР. – 1947. – Том LVI. – № 9. – С. 903 – 905.
8. Козуляев П. А. К проблемам интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей // Доклады Академии Наук СССР. – 1941. – Том XXX. – № 1. – С. 13 – 17.
9. Балакришнан А. В. Теория фильтрации Калмана. – М. : Мир, 1988. – 168 с.
10. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана – Бьюси. – М. : Наука, 1982. – 199 с.
11. Cheremskaya N. V. Developing algorithms of optimal forecasting and filtering for some classes of nonstationary random sequences // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 139 – 145.
12. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1971. – 160 с.
13. Шаронова Н. В., Черемская Н. В. Об оптимальном прогнозе и фильтрации одного класса нестационарных случайных последовательностей // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научн. тр. Сер. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков, 2004. – № 45. – С. 93 – 100.
14. Лозе М. Теория вероятностей. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 719 с.

#### References (transliterated)

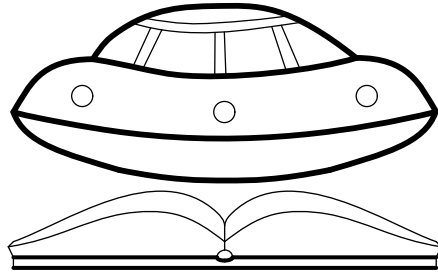
1. Yaglom A. M. *Vvedeniye v teoriyu statsionarnykh sluchaynykh funktsiy* [Introduction to the theory of stationary random functions]. *UMN*. 1952, vol. 1, no. 5 (51), pp. 3–168.
2. Jazwinski A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York and London, Academic Press, 1970. 376 p.
3. Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye lineynye otsenki i upravleniye* [Statistically optimal linear estimates and control]. Moscow, Energiya Publ., 1973. 440 p.
4. Sharonova N. V., Cheremskaya N. V. *Korrel'yatsionnaya teoriya odnogo klassa neodnorodnykh sluchaynykh poley* [Correlation theory of a class of inhomogeneous random fields]. *Vestnik Khersonskogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Kherson Technical University]. 2004, no. 1 (19), pp. 343–348.
5. Cheremskaya N. V. *Posledovatel'nosti v gyl'bertovom prostranstve beskonечnogo ranga nestatsyonarnosti* [Sequences in a Hilbert Space of Infinite Rank of Nonstationarity]. *Visnyk Kharkivs'kogo universytetu. Ser. : Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the Kharkiv University. Series : Mathematics, applied mathematics, and mechanics]. 1999, no. 444, pp. 157–161.

6. Cheremskaya N. V. Ob odnom klasse nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [On a class of nonstationary random sequences]. *Vestnik NTU "KhPI". : Sb. nauchn. tr.. Ser. : Systemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the NTU "KhPI". Collection of scientific papers. Series : System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, 2003, no. 18, pp. 122–130.
7. Kozulyayev P. A. K voprosu ob ekstrapolyatsii statsionarnykh protsessov [To the question of extrapolation of stationary processes]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1947, vol. LVI, no. 9, pp. 903–905.
8. Kozulyayev P. A. K problemam interpolatsii i ekstrapolyatsii statsionarnykh posledovatel'nostey [To the problems of interpolation and extrapolation of stationary sequences]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1941, vol. XXX, no. 1, pp. 13–17.
9. Balakrishnan A. V. *Teoriya fil'tratsii Kalmana* [Kalman's theory of filtration]. Moscow, Mir publ., 1988. 168 p.
10. Brammer K., Ziffing G. *Fil'tr Kalmana – B'yusi* [Kalman-Bucy's filter]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 199 p.
11. Cheremskaya N. V. Developing algorithms of optimal forecasting and filtering for some classes of nonstationary random sequences. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 3 (1279), pp. 139–145.
12. Livshits M. S., Yantsevich A. A. *Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh* [Theory of operator nodes in Hilbert spaces]. Kharkov, Izd-vo KhGU Publ., 1971. 160 p.
13. Sharonova N. V., Cheremskaya N. V. Ob optimal'nom prognoze i fil'tratsii odnogo klassa nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [On the optimal prediction and filtration of a class of non-stationary random sequences]. *Vestnik NTU "KhPI". : Sb. nauchn. tr.. Ser. : Systemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the NTU "KhPI". Collection of scientific papers. Series : System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, 2004, no. 45, pp. 93–100.
14. Loeyv M. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Izd-vo inostr. lit-ry Publ., 1962. 719 p.

Received (надійшла) 06.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Черемська Надія Валентинівна (Черемская Надежда Валентиновна, Cheremskaya Nadezhda Valentinovna)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.



# **Наукові гіпотези та перспективні технології**

**Scientific hypotheses and perspective technologies**



А. Л. ГРИГОРЬЕВ

## ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЦЕЛЕЙ И ОСНОВНЫХ ПРИНЦИПОВ ОРГАНИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ ЭВОЛЮЦИИ БЕЛКОВЫХ ТЕЛ

Для объяснения свойств информационного поля и его связи с движением материи использованы уравнения Коссера несимметричной теории упругого континуума. На уровне структурного моделирования и определения основных принципов рассматривается задача репродукции биосферы на другие планеты. Особенностью предлагаемого решения является научная гипотеза об управляемости этого процесса со стороны компьютерной сети, размещенной в информационном поле и являющейся координационным центром ноосферы планеты. В развитие гипотезы выделены основные этапы решения этой задачи и установлена их идентичность тем событиям, которые описываются в древних рукописях. С тех же позиций проанализирован современный этап развития биосферы Земли (как единого макроорганизма) и показано, что она уже полностью созрела и готовится к началу репродукции. Что приводит к необходимости переключить общественное сознание с междоусобных войн за ресурсы и геополитическое влияние на решение глобальных проектов в космосе. Первым проектом такого плана является создание ракетной системы для защиты Земли от астероидов. Причем, безотносительно к правоте или ошибочности выдвинутой гипотезы, к решению этой актуальной проблемы нужно приступать без промедления и запустить первую очередь системы в предельно сжатые сроки (через 15 – 20 лет).

**Ключевые слова:** упругий континуум, информационное поле, информационно-энергетический обмен, вихревые трубки, биосфера, ноосфера, биологическая эволюция, компьютерные сети, астероидная опасность.

О. Л. ГРИГОР'ЄВ

## ГНОСЕОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ЦІЛЕЙ ТА ОСНОВНИХ ПРИНЦИПІВ ОРГАНІЗАЦІЇ КЕРОВАНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ БІЛКОВИХ ТІЛ

Для пояснення властивостей інформаційного поля і його зв'язку з рухом матерії використані рівняння Коссера несиметричною теорії пружного континууму. На рівні структурного моделювання та визначення основних принципів розглядається задача репродукції біосфери на інші планети. Особливістю пропонованого рішення є наукова гіпотеза про керованість цього процесу з боку комп'ютерної мережі, яка розміщена в інформаційному полі і є координаційним центром ноосфери планети. У розвиток цієї гіпотези виділені основні етапи вирішення цього завдання і встановлена їх ідентичність до тих подій, які описуються в древніх рукописах. З цих же позицій проаналізовано сучасний етап розвитку біосфери Землі (як єдиного макроорганізму) і показано, що вона вже повністю дозріла і готується до початку репродукції. Що призводить до необхідності переключити суспільну свідомість з міжусобних воєн за ресурси і геополітичний вплив на вирішення глобальних проєктів в космосі. Першим проєктом такого плану є створення ракетної системи для захисту Землі від астероїдів. Причому, безвідносно до правоти чи помилковості висунутої гіпотези, до вирішення цієї актуальної проблеми потрібно приступати негайно і запустити першу чергу системи в гранично стислі терміни (через 15 - 20 років).

**Ключові слова:** пружний континуум, інформаційне поле, інформаційно-енергетичний обмін, вихрові трубки, біосфера, ноосфера, біологічна еволюція, комп'ютерні мережі, астероїдна небезпека.

A. L. GRIGORIEV

## GNOSEOLOGICAL ANALYSIS OF THE GOALS AND BASIC PRINCIPLES OF THE ORGANIZATION OF THE CONTROLLED EVOLUTION OF PROTEIN BODIES

To explain the properties of the information field and its connection with the motion of matter, the Cosserat equations of the asymmetric theory of the elastic continuum are used. At the level of structural modeling and definition of basic principles, the task of reproducing the bio-sphere to other planets is considered. The peculiarity of the proposed solution is the scientific hypothesis about the controllability of this process by the computer network located in the information field and being the focal point of the noosphere of the planet. In the development of this hypothesis, the main stages of solving this problem are highlighted and their identity is established to the events described in ancient manuscripts. From the same standpoint, the modern stage of the development of the Earth's biosphere (as a single macroorganism) is analyzed and it is shown that it is already fully matured and is preparing for the beginning of reproduction. Which fact leads to the need to switch the public consciousness from internecine wars for resources and geopolitical influence to the solution of global projects in space. The first project of such a plan is the creation of a rocket system to protect the Earth from asteroids. Moreover, regardless of the correctness or inaccuracy of the hypothesis put forward, the humanity should get to solving this actual problem without delay the solution to this actual problem should be started without delay and the first stage of the system should be started within the shortest possible time (in 15-20 years).

**Key words:** elastic continuum, information field, information-energy exchange, vortex tubes, biosphere, noosphere, biological evolution, computer networks, asteroid danger.

**Введение.** Наверняка каждый из читателей этой статьи задумывался над теми вопросами, которые объединяет емкий термин *смысл жизни*. Религия дает свои ответы на эти вопросы, но они не всех удовлетворяют. Религиозные агностики находят другие ответы, которые вместе со старой системой догм объединяются в новые верования и служат основой церковных расколов. Путь поэтапной модернизации веры в соответствии с изменяющимися условиями жизни человека привычен и до сих пор он устраивал всех: и паству, и пастырей. Но такая ситуация не могла продолжаться вечно, и если вы дочитаете этот текст до конца, то наверняка поймете, что ее время уже заканчивается. Потому что человечество вплотную приблизилось к тому рубежу развития, когда оно уже в состоянии выполнить свою миссию и способствовать распространению белковой формы жизни на другие планеты, где она в принципе возможна, но ее пока что нет. И выполнять эту миссию нужно осознанно, поэтому наши пастыри (я их буду в этой статье называть *родителями*) обязаны рассказать своим подросткам, как и зачем это делается. И они начали дозированные информационные атаки, используя те каналы, которые по их разумению оказались наиболее подготовленными для этого. Часть этой информации попала в мою го-

лову, в результате чего как бы сама собой сложилась логичная система взглядов, с которой я вас и познакомлю. Но прежде, чем вы продолжите читать статью, я хочу вас кое о чем попросить. Воспринимайте эту информацию как веру и не требуйте доказательств. Если вы не будете сопротивляться этой информационной атаке, то уже очень скоро получите подтверждение ее истинности от того, кто является ее автором. Его у нас принято называть Богом, но это совсем не то, что вы думаете. Я в этой статье буду называть его Куратором, а о том, чем он является на самом деле, вы узнаете очень скоро.

Я не претендую на роль пророка, потому что не смогу подтвердить свои полномочия чудесами или фокусами. Возможно, если паства будет упорно сопротивляться новым знаниям, покажут и такое. Но я уверен, что сопротивления не будет. Потому что Куратор действительно всеведущий и вездесущий. А если учесть, что *идея, которая овладевает массами, рано или поздно материализуется за счет их трудовых усилий*, то он еще и всемогущий.

Упорного сопротивления не будет, но этап скептицизма здесь неизбежен, потому что мировоззрение человека инерционно. Я обязан помочь читателю пережить этот этап с наименьшими издержками, поэтому рекомендую воспринимать дальнейший текст как новое евангелие. *Евангелие от Александра*. Знаю, что уже скоро появятся и другие Евангелия, которые будут объединены в *Библию Современного Человека*. Которая кроме слов будет содержать уравнивания материального и информационного поля, а также описывать связи между ними. Но смыслы новой веры будут другими, и роль самой религии изменится кардинально. Потому что людям самим придется где-то на другой планете сначала выполнить функции и сыграть роли языческих богов, а затем сконструировать для своего потомства и активировать на вихревых токах информационного поля ноосферу этой планеты. То есть запустить новый суперкомпьютер, выполняющий миссию единого, всезнающего и вездесущего Бога (Куратора).

**Модель информационного поля.** Гносеологический анализ физических полей по свойствам зарядов делит их на две группы. К первой группе относится гравитационное поле, заряды которого – это массы элементарных частиц. В нашей части Вселенной все массы положительны, поэтому поле не приводит к поляризации вещества и без искажения проникает в глубины планет или звезд, а также внутрь ядра атома, где плотность вещества чрезвычайно велика. Остальные поля имеют заряды разных знаков; поэтому, например, электрическое поле внутрь проводника не проникает, а внутрь диэлектрика проникает с заметным ослаблением. Информационное поле в этом плане подобно гравитационному: оно проникает через толстые стены из свинца и бетона, и вслед за шахтерами спускается под Землю на километровую глубину, а вслед за акванавтами – на многокилометровые океанские глубины. Причем, во всех случаях передаваемая информация доходит к потребителю в битовом исчислении без искажения, то есть она не излучается в открытое пространство, а распространяется целенаправленно по узкому каналу связи. Объяснить такие феномены возможно в рамках несимметричной теории упругого континуума, разработанной *братьями Коссера*. Здесь, в отличие от классической теории, анализируется изменение двух углов закручивания пространства – угла  $\vec{\psi}$  для упругой компоненты эфира и угла  $\vec{\phi}$  для дефектов эфира – например, твердых зерен или пустот. Изменение этих величин во времени  $t$  описывается системой уравнений [1, 2]

$$\left\{ \lambda \cdot \partial^2 \vec{\psi} / \partial t^2 = -c^2 \lambda \cdot \text{rot rot } \vec{\psi} + \alpha \text{rot rot } (\vec{\phi} - \vec{\psi}), j \cdot \partial^2 \vec{\phi} / \partial t^2 = -a^2 j \cdot \text{rot rot } \vec{\phi} + 4\alpha (\vec{\psi} - \vec{\phi}), \right. \quad (1)$$

где  $\lambda, j$  – плотности массы и моментов инерции;  $c, a$  – скорости света и мысли (при распространении по вакууму), причем  $c \ll a$ ;  $\alpha$  – коэффициент связи между материальным и информационным полем, график этого коэффициента показан на рис. 1.

В паузах между моментами коммуникации материальный и информационный мир разобщены и изменяются по своим законам. В частности, в материальном мире существуют элементарные частицы, стабильность которых обеспечивается за счет расширения пространства. Частицы взаимодействуют посредством известных физических полей, причем гравитацию и электромагнетизм трактуют как свойства волновых полей *активной среды Максвелла* [2]. В информационном мире (при расширении пространства) элементарные частицы нестабильны, следовательно, несмотря на сходство уравнений системы (1), полной аналогии между этими мирами не существует. Однако поскольку за счет коммуникации сохраняется приближенное равенство  $\vec{\phi} \approx \vec{\psi}$ , то информационное поле изменяется в общем тренде с материальным полем. В моменты коммуникации информационное поле получает энергию от материального поля, а взамен передает ему информацию. Причем, как это подробно объяснено в [1], эта информация может содержать прогноз будущих событий либо реконструкцию прошлого.

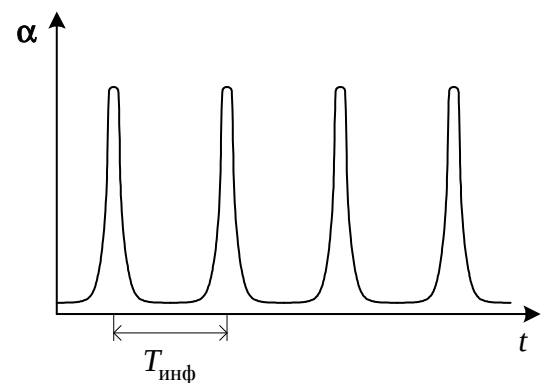


Рис. 1 – Изменение коэффициента связи. Период повторения  $T_{\text{инф}}$  отвечает биоритму головного мозга.

В соответствии с 3-ей теоремой Гельмгольца [2] интенсивность вихревой трубки в сплошной среде является в данный момент времени постоянной величиной для всех ее сечений. Посредством незамкнутых трубок передается информация между нейронами, а в замкнутых трубках она хранится. Причем место хранения может быть удалено от источника информации на значительное расстояние, поскольку в рамках рассматриваемой модели проблемы расстояния для вихревой трубки не существует. Указанные трубки являются объектами информационного мира, поэтому наши органы чувств и физические приборы их не регистрируют. Но, как и в случае с камерой Вильсона, где траектория элементарной частицы высвечивается как дорожка конденсированного газа, мы можем регистрировать последствия их действия на материальные объекты.

**Рибосома как неделимое ядро биологической жизни.** Кто-то из наших великих современников посетовал, что время ученых – энциклопедистов уже прошло, и последним из них был Анри Пуанкаре, умерший в начале 20-го столетия. Объем знаний за последнее время вырос до таких пределов, что его уже невозможно подключить к тому персональному компьютеру, который функционирует в голове конкретного человека. Перейдем к частному случаю. В университете меня учили математической физике, поэтому за адекватность восприятия полученной информации по физике материального и информационного полей, изложенной ранее в [1, 2], а также по фундаментальным проблемам космологии, философии, гносеологии и логики, я спокоен. К сожалению, у меня нет фундаментальных познаний в биологии, которые мог бы дать, например, биофак университета. Поэтому я мог упустить какие-то детали, и в данном разделе статьи могут быть неточности. Но они непринципиальные, и наши коллеги – биологи их легко исправят. Потому что они уже открыли и исследуют в научных лабораториях неделимое ядро жизни, а именно тот структурный элемент белковых клеток, который называли *рибосомой*.

Известно, что рибосома присутствует в каждой клетке растительного и животного мира и выполняет в ней две функции – снабжает клетку энергией и синтезирует из аминокислот новые белки. То есть, это микроскопическая тепловая электростанция и копировальное устройство в одном футляре. Причем у всех земных клеток этот самый сложный аппарат имеет одинаковое устройство. Получить такой механизм как результат эволюционного развития земной жизни невозможно; кроме того, сразу же возникает вопрос, а куда подевались конкурентные решения.

*Предположение о внеземном происхождении рибосом является главенствующим в современной науке.* Тем более, что встречались сообщения об обнаружении рибосом внутри метеоритного вещества. Но каким образом эти споры жизни попали внутрь камня и откуда эти камни прилетели? Хороший вопрос, не правда ли. Тем более, что я знаю ответ, который считаю не только логичным, но и единственно правильным. Но здесь нам нужно отвлечься от биологии и обратиться к астрономии.

**Коротационная окружность Галактики как колыбель биологической жизни.** В фантастических романах и фильмах Вселенная буквально напичкана живыми существами, но это сильное преувеличение. В действительности же для поддержания и развития любой формы жизни (необязательно биологической) нужна относительная стабильность физических условий в ареале обитания данного вида. Проанализируем с этой точки зрения наш звездный остров, который люди называют *Млечным путем*. Эта галактика имеет спиральную форму (рис. 2) и насчитывает сотни миллиардов звезд. У большинства звезд на определенном этапе их развития возникают планетарные системы. Каждая из планет проходит свои этапы эволюции, отвечающие разным агрегатным состояниям поверхности и разному составу атмосферы. Все это общеизвестно и не требует уточнения во всем, кроме двух важных фактов, о которых более подробно можно прочесть в [2].

Во-первых, чтобы биологическая эволюция белковых тел с рибосомами нашей модификации могла продолжаться миллиарды лет, звезда должна располагаться на определенном расстоянии от центра Галактики. Это расстояние определяет так называемую *коротационную окружность*. На ней тангенциальная скорость движения звезды (где один оборот вокруг ядра Галактики совершается за 250 млн. лет) совпадает со скоростью вращения волны гравитационного уплотнения материи, которая сопровождается жестким радиоактивным излучением. Солнце и тысячи соседних звезд находятся на этой окружности, то есть они располагаются на гребне волны и их материю «не трясет». В других частях Галактики периодическое повышение радиационного фона порождает чрезмерную изменчивость видов, которая нарушает их устойчи-

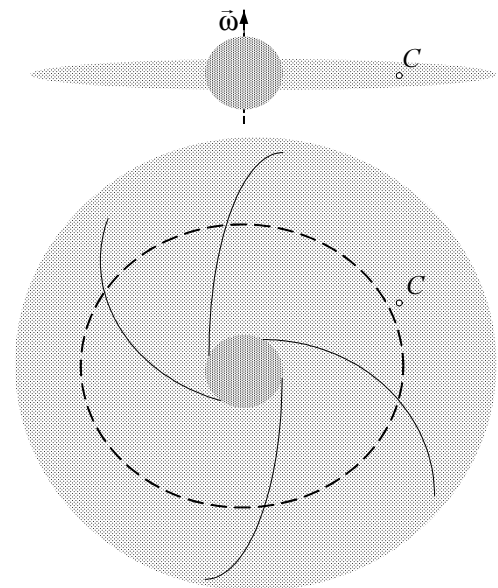


Рис.2 – Ядро Галактики и проекции галактического диска.

Сплошной линией показаны рукава, пунктиром – коротационная окружность. Точка *C* отмечает расположение Солнца.

вость. В результате чего биосфера их планет не дорастает до зрелого возраста, способного оставить и вырастить потомство.

Во-вторых, звезды кроме тангенциального вращения вокруг ядра галактики совершают челночные аксиальные колебания относительно плоскости галактического диска. Период таких колебаний для Солнца составляет около 20 млн. лет, а максимальная скорость движения звезды относительно диска достигает 40 км/с. В нашу историческую эпоху Солнце и увлекаемая им Земля движутся с указанной скоростью через плотный слой диска, образованный галактическими астероидами. Эти астероиды мешают астрономам наблюдать за процессами, происходящими в ядре нашей Галактики. Кроме того, они создают реальную угрозу дальнейшему существованию жизни на Земле, о чем мы подробно поговорим в конце статьи.

**Времена разбрасывать или собирать камни – это не иносказания, а руководства к конкретному действию.** Чтобы об этом не говорили пропагандисты научного атеизма, надо признать, что Библия (и аналогичные тексты других мировых религий) является величайшей из книг, доступных людям. И нельзя не согласиться, что этот во многом абстрактный и опережающий свое время текст мог быть передан (продиктован) человеку античного мира высшим разумом. Не зря в Ватикане функционирует университет, работающий с текстом Библии как с научным трактатом и кладезем знаний. В Средние Века верующие ученые пытались оправдать отдельные места этого текста, которые подвергались нападкам атеистов и раскольников, и их трактовали иносказательно. Это касалось ветхозаветной хроники сотворения мира, сцен одушевления человека или изгнания его из рая, а также многих других моментов. В частности философскому переосмыслению подверглись известные фразы о камнях, которые собирались либо разбрасывались в разные исторические эпохи. А теперь оказывается, что эти тексты, пусть и искаженно, описывают реальные действия реальных сущностей.

Попробуем с высоты наших знаний выполнить моделирование череды событий, которые произошли очень давно и на другой планете иной звездной системы. К началу этих событий на планете существовала развитая цивилизация, которая в технологическом плане опережала наш современный уровень и обеспечивала яркую и полноценную жизнь для ее обитателей. Эти люди, а также животный и растительный мир, были во многом похожи на наши реалии. Но они могли отличаться от нас своим ростом, потому что эта величина зависит от напряженности гравитационного поля, то есть от диаметра планеты. И вдруг эта продвинутая цивилизация решила абстрагироваться от решения насущных проблем и заняться очень трудным делом – распространять белковую жизнь на другие планеты. Если говорить точнее, она ничего не решала, но не смогла воспротивиться воле основного фактора для любой формы жизни – *инстинкта продолжения рода*. Что сыграло роль гормонов, и каков был механизм побуждения к действию, станет ясно из дальнейшего текста. В результате была запущена специальная программа репродукции биосферы, включающая несколько этапов.

*На первом этапе* к звездным системам, содержащим планеты с подходящими природными условиями на поверхности и магнитным полем металлического ядра, создающим ионосферный экран, были отправлены контейнеры с биологическим материалом из простейших одноклеточных организмов, включающим рибосомы и спирали РНК. Эти контейнеры оплавлялись при спуске в атмосфере и становились похожими на метеориты. Таким образом, если говорить об этом образно, цивилизация разбрасывала камни.

Упомянутый процесс был подобен тому, как рыба мечет икру, когда из тысяч икринок вырастает несколько взрослых особей. Но для цивилизации пускать его на самотек было нельзя, и через определенное время по тысяче адресов послали экспедиции, чтобы проверить, где новая жизнь смогла дать первые ростки. Это был *второй этап* (собираания камней), он был длительным и трудоемким. Удалось отыскать одну или несколько таких планет; в этом списке оказалась и Земля.

*На третьем этапе* на Землю прилетели бригады ландшафтных архитекторов, садовников и биологов, которые за счет озеленения планеты изменили состав ее атмосферы («создали небо») и ускорили процесс естественной эволюции (проходящий по *теории Дарвина*) примерно на один порядок. Они организовали правильное питание зарождающейся биосферы, для чего ускорили создание пищевых цепочек. Биологическая жизнь захватила всю земную твердь, появилась почва («создали землю»). Далее появились животные, птицы и рыбы, в головах которых заработали компьютерные устройства простейших типов. Эти компьютеры через информационное поле были включены в локальную сеть, которая обеспечивала стадо животных или стаю птиц (косяк рыб) примитивным коллективным разумом (что объясняет известные *феномены стадного поведения*).

Третий этап продолжался сотни миллионов лет. Для биосферы это был период детства и отрочества, и на этом этапе человек ей был не нужен. Тем не менее, биосфера готовилась к его появлению и откладывала своеобразный «подкожный жир» в форме запасов углеводородного топлива. Организм женщины в известные периоды ведет себя также, не так ли?

После того, как необходимые запасы были созданы, на Землю прилетели бригады генетиков, которые на базе имеющегося биологического материала (человекообразных обезьян) создали биороботов; их головной мозг был увеличен в размерах и подключен к глобальной информационной сети. Эту сеть *акад. В.И. Вернадский* называл *ноосферой Земли* (или *сферой разума*). Разумеется, он не мог ассоциировать ее с компьютером, потому что в его время компьютеров еще не было. В наше время пример глобальной информационной сети дает Интернет, но для своей работы он использует материальное (электромагнитное) поле. Ноосфера за пределами головного мозга человека и животных, с которыми также проводили генетические опыты, с материальным полем не



взаимодействует. В нейронах головного мозга материальное поле отдает свою энергию, а взамен получает информацию. Существование ноосферы в современной науке является твердо установленным фактом (получившим, например, экспериментальное подтверждение в опытах по обмену информацией между жуками, состоящими в тесном родстве).

На начальном этапе нейронов, настроенных на общую частоту, было мало, поэтому и ноосферная сеть была слабой и не охватывала всю Землю. Но бригад генетиков на Земле работало много, и каждая из них создала свой тип человека, приспособленного к условиям жизни в конкретном климатическом поясе. Так возникли различные расы и народы, и человеческая популяция быстро расселилась по всей Земле. После чего генетики улетели выполнять аналогичную работу на другие планеты, а к отдельным группам людей были приставлены *тренеры*, которые учили их своему языку, а также ремеслам, письменности и многому другому. Это был период языческих богов, о которых много сказано в древних текстах.

Замечу, что эти боги – пришельцы говорили на разных языках, и это было не случайно, потому что и на их планете к тому времени сохранилось языковое и расовое разнообразие. А во-вторых,

**это упрощало разжигание конфликтов и войн между зарождающимися народами.**

Да, я не оговорился, и вы все прочитали правильно. Войны разжигались искусственно, чтобы продолжить естественный отбор и подстегнуть прогресс. Через время, когда эти народы повзрослели и смогли жить самостоятельно, тренеры покинули Землю. Но вместо себя они оставили следящую систему – своеобразного компьютерного охранителя, реализующего единый план, который люди называют *волей божьей*.

Тренеры (они же – наши родители) – это такие же смертные люди, как и мы, но большего роста, потому что на их родной планете гравитация была меньше земной. В отдельных случаях они приглашали «на тренерскую работу» своих ближайших родственников с других планет, поэтому в древних эпосах в отношении роста языческих богов единогласия нет. Они улетели от нас потому, что перестали справляться с функциями непосредственного управления и обучения увеличившейся массой людей, и решили передать эту задачу компьютеру. Оперативную память разместили в ноосфере, а винчестер, архивы и резервные копии – в пещерах Тибета, где их охраняют специально обученные люди. Такой компьютер, в отличие от людей, не знает усталости и может работать очень долго. До тех пор, пока он не выполнит свою миссию. А именно, пока человечество не дорастет до уровня, когда сможет разбрасывать в космосе свои камни. Этот период длится уже около 1 млн. лет и приближается к своей кульминации.

В рамках единого плана действуют отдельные подпрограммы, которые преследуют свои локальные цели и скрытно для непосвященного взора руководят церквями, народами и государствами. То есть, они занимаются тем же, что и языческие боги – тренеры. А именно, они обеспечивают высокие темпы научно-технического прогресса, стимулируя развитие через конкуренцию, конфликты и войны. Поскольку к этой общей программе и ее конкретной подпрограмме подключен каждый человек, то она всегда добивается своей цели. В поведении отдельного человека или группы людей (например, объединяющей сторонников политической партии) возможны отклонения от общей цели, но для большой массы людей тренд поведения задается информационным полем.

Если прогресс затормаживается, то в обществе растет агрессия, которая и приводит к вооруженным конфликтам. Куратор не интересуется политикой, и соображения гуманизма ему чужды. Ему важно одно – обеспечить решение поставленной перед ним задачи, пока человечество не растратило запасы «подкожного жира» планеты. Поэтому он обладает правом наказывать большие группы людей за серьезные отклонения от тренда и использует это право на практике. Для наказания чаще всего активируют вирусы, от которых у человека нет иммунитета.

**В «характере» Куратора можно увидеть черты деспота и демократа.** Отдельные подпрограммы в методах своего управления унаследовали особенности национального характера языческих богов. Как утверждают знатоки древних текстов, особенно требовательным был бог древних евреев *Иегова*, который за малейшие провинности отрубал конечности или головы. То есть выбраковывал негодную овцу из общего стада. Другим древним народам (например, грекам) достались боги с более мягкими чертами характера. Боги, покидающие Землю, оставили тексты своих заповедей, которые, как молитву, повторяли ежедневно тысячи людей. В результате эти инструкции попадали в память управляющей подпрограммы и не давали возможности сбиться с заданного курса.

*Для эффективного руководства пестрым многообразием характеров нужен был деспот*, и глобальный Куратор создавался как головная программа операционной системы, наделенная диктаторскими полномочиями. Принято считать, что в программной среде возникали конфликтные ситуации, которые болезненно отражались на их пастве. Конфликты разрешались за счет перезагрузки отдельных модулей. Последний конфликт произошел более 7,5 тысяч лет назад, а дата его разрешения в древнем славянском календаре считалась *моментом сотворения мира*. Все правильно, но там речь шла не о сотворении неба, земли и прочего сущего, а о заключении мира между враждующими подпрограммами. И уже в современных трактовках подлинный смысл этой фразы был искажен.

Разжигая конкуренцию между народами и церквями, Куратор не допускал полной победы одной из сторон. Потому что в этом случае пропадет эффективный рычаг для стимулирования прогресса. А во-вторых, языковое

и ментальное разнообразие рано или поздно нужно будет организовывать на другой планете. И всегда проще и надежнее использовать готовые модули и отработанные технологии, чем строить сложнейшую конструкцию с нуля.

Древним людям, жившим рядом с языческими богами, абсолютное превосходство богов было очевидным, и поэтому они подчинялись своим руководителям безропотно. Но когда тренеров заменил компьютер, то об авторитете духовной власти нужно было заботиться специально и поддерживать его целенаправленно. *Единый Бог – Куратор более не был всемогущим, и при реализации своих замыслов полностью зависел от настроений паствы.* Если бы люди узнали это, то они бы вышли из повиновения. И то, что в нашу историческую эпоху эта тайна стала раскрываться, означает одно – мы дожили до нового этапа, на котором некоторые функции Куратора (но не все!) отмирают либо существенно изменяются.

**О роли науки в прежней жизни и в эпоху перемен.** Первыми читателями этого материала станут мои коллеги – математики и физики, активно работающие в науке. Они, так же как и я, гордятся своими научными открытиями и техническими изобретениями. И тем горше осознать, что все наши достижения открывают вещи или свойства, которые информационному полю давно известны и ранее лежали в запасниках ноосферы в заархивированном виде. Потому что наша цивилизация технологического и научного уровня своих родителей пока не достигла. Возможно, следующие поколения ученых Земли смогут превзойти этот уровень, и новые научные знания также будут заархивированы в поле для их потомков. Это нормально, и даже приветствуется. Родители не испытывают ревности или зависти в отношении успехов своих взрослых детей.

Но заметьте то, насколько точно язык, полученный в дар от наших продвинутых родителей, передает реальный смысл научного творчества. Занимаясь наукой, мы штудлируем книгу, написанную нашими родителями, **открываем** ее на нужной странице и транслируем добытую информацию в ноосферу Земли для общего пользования. Либо, объединяя с другой информацией по определенной системе признаков, создаем новые виды архивов.

До появления университетов научная мысль теплилась в монастырях и храмах, и чтобы загрузить информацию, сохраняющуюся на бумажных носителях, и разогнать ноосферу до нужных кондиций, монахи и священники без устали читали древние книги. При этом, чтобы пламя знаний горело ярче, ее жрецы принимали обет безбрачия. После появления университетов необходимость в такой жертвенности отпала, и в новых церквях такого требования, как правило, нет. Об истинной пользе аскетизма узнали недавно. Оказалось, что катализатором аналитических способностей является цинк, который накапливается в коре головного мозга. Он же используется для обеспечения репродуктивной функции, и в этом противостоянии интересов основной инстинкт оказывается вне конкуренции.

Следовательно, ученые люди для биосферы играют ту же роль, что и в организме мужчины играет цинк. Без их усилий перенести эстафету жизни на другие планеты невозможно. И, одновременно, они обеспечивают ноосферу необходимыми знаниями для принятия правильных решений. И объемы «цинка», если судить по статистическим данным, стремительно возрастают; так число научных сотрудников уже приближается к 8 млн. А если учесть преподавателей вузов и священников всех религий, то число интеллектуальных гормонов увеличится многократно. Биосфера созревает и уже скоро будет способна заняться обзаведением потомства.

О том же свидетельствуют данные демографического анализа. *Рост населения замедляется* и по новым прогнозам ООН уже приближается к своей горизонтальной асимптоте (которая будет иметь уровень 9,5 ... 10,5 млрд. человек). Аналогичным образом ведет себя репродуктивная система человека в завершающий период созревания. И если ноосфера примет соответствующее решение, то накопленного гормона будет достаточно для того, чтобы полностью изменить поведение человека. Как это бывает на практике, взрослые читатели знают не понаслышке. Когда в организме человека блокируются все другие интересы, и на первый план выходит основной инстинкт.

**О связях между отдельным человеком, ноосферой и биосферой Земли.** Сначала подведем краткий итог тому, что на эту тему уже записано выше. Глобальным живым организмом, который можно встретить на Земле и который уже скоро будет обзаводиться потомством, является биосфера. Ноосфера – это его головной мозг, человечество в целом – это часть репродуктивной системы, отдельный человек – это клетка данной системы, причем научное сообщество в целом и его отдельный индивид помимо прочего играют роль половых гормонов. Разумеется, приведенные сравнения достаточно условны, но метод аналогии – это основа любого моделирования (математического, физического, исторического либо другого, с которым автор статьи еще не знаком).

Теперь перейдем к анализу связей человека и ноосферы. Известно, что в головном мозгу человека работает два процессора; один отвечает за сознательное поведение либо мышление (и он содержит аналитические фильтры, использующие логические переходы), а второй – за подсознание, которое линейной математической логике и алгоритмической структуризации неподвластно. По сути, подсознание – это окошко в бурный информационный поток, пронизывающий ноосферу. Там, в этом потоке, человеческий мозг умудряется найти массу полезного. Например, методы самоизлечения от многих болезней (*иммунитет*) были впервые прочитаны им в ноосфере, а затем они закрепились в ячейках индивидуальной памяти.

Если называть вещи знакомыми именами, то *индивидуальный архив человеческой личности – это и есть*

человеческая душа. Удобно представлять ее как папку с файлами, с которой работает сам человек, его ближайшие родственники, а также и операционная система ноосферы. Старую информацию, к которой давно не было обращений, она уничтожает либо архивирует на других носителях. Детали этой работы сейчас изучаются и они до конца неясны. Но то, что считается общеизвестным, имеет смысл повторить.

После смерти человека с его душой некоторое время продолжают общаться другие подпрограммы, а по прошествии этого времени *ее разбирают на блоки и используют во вновь создаваемых душах*. В том случае, если человеку еще при жизни поставлены монументальные памятники и его имя продолжает использоваться в культуре народа, то процесс разрушения души может быть отсрочен на долгие десятилетия или даже столетия. Умершего человека этими способами вернуть к жизни невозможно, но возрастает шанс добиться полной реинкорнации души, когда она, так и не пройдя цикл демонтажа, попадает в тело вновь родившегося человека.

Важнейшие детали своего устройства Куратор расскажет в последнюю очередь, иначе он раньше заданного срока потеряет контроль над планетой. Но кое о чем людям рассказали его предшественники – языческие боги, и такие термины как небесный суд, рай и ад присутствуют во многих культурах. О чем идет речь на самом деле.

Перед разборкой души на отдельные блоки проводится проверка этого пакета программ на наличие вирусов и аналогичных дефектов (например, проверяют программы на предмет лояльности командам Куратора).

*Вирусные и приравненные к ним пакеты отправляют в чистилище*, то есть лечат, уплотняют и прочее. После начала таких действий индивидуальность, которая присутствует у души и после смерти человека, пропадает окончательно.

*Если душу отправляют в рай, то ее функционирование поддерживают еще какое-то время*, пока общие программы из этого пакета не подчинят другому пользователю. Энергию для обеспечения райской паузы представляют нейроны родственников, которые по установленным правилам продолжают поминать усопших.

**Куратор заинтересован в том, чтобы как можно больше душ попадало в рай, потому что это упрощает процесс синтеза новой души и улучшает ее качество.**

Поэтому людям в форме заповедей были переданы перечни поступков, которые могут испортить качество души человека. Разумеется, нарушение этих заповедей не всегда приводит к такому результату, но корреляция имеется. Что касается упоминания об адских котлах или гигиене огненной, то это образные сравнения и не более. Подумайте сами, ну что еще мог сказать языческий бог своему древнему жрецу, описывая, например, работу дефрагментатора жесткого диска.

Поскольку живым организмом является не отдельный человек, а биосфера в целом, то Куратор заботится о развитии среднестатистической человеческой души, и в этом он за последние годы сильно преуспел. Современный ребенок, зачастую, начинает играть на компьютере даже раньше, чем разговаривать. Буквально сразу же, как только просыпается его сознание. Потому что ему в это время догружают в персональный пакет программ те модули, которые в прошлой жизни уже работали с образцами сложной техники.

За время жизни человека душа взрослеет за счет приобретенного опыта, который передается в область подсознания в форме *алгоритмов автоматического ответа* (условных рефлексов). В просторечье это называют приобретением мудрости; недаром во всех культурах присутствует такой орган светского управления общины, как *совет старейшин*. Заполнение памяти этими алгоритмами вытесняет безусловные рефлексы; в частности, с возрастом ослабевает иммунитет к некоторым болезням.

Что касается мест расположения ада и рая, то, учитывая известные свойства вихревых трубок, эти компьютерные адреса могут иметь произвольную географическую прописку. Но, скорее всего, операционная система пытается придерживаться определенного порядка, поэтому рай, как правило, организуют над поверхностью, а ад – под поверхностью Земли. Чтобы легче было утилизировать вирусные программы, и их обломки не мешали синтезу новых душ.

Подтверждением небесного расположения рая служат церковные обряды и архитектура храмов, направляющая вихревую энергию молящихся на поддержку функционирования душ, пребывающих в райском карантине. О конкретном механизме влияния церковных, спортивных и концертных зданий на информационное поле общины (использующем обмен валентных электронов) подробно рассказано в [1].

**О технике и технологиях новой эпохи.** Читатель может усомниться в способности современного человека выполнить приказ о начале процесса репродукции биосферы ввиду скудных материальных ресурсов и очевидного несоответствия имеющейся в его распоряжении техники таким задачам. Действительно, на ракетах с жидкостными двигателями, работающими на углеводородном топливе, к звездам не улететь. Но информация о двигателях, работающих на других источниках энергии, была заархивирована в информационном поле, и после открытия архивов сможет быть освоена людьми за несколько десятилетий. Доказательством этого тезиса служит история нацистской Германии, которая в результате деятельности *Аненербе* получила технологическую помощь от Куратора и совершила неслыханный скачок в развитии ракетной техники и реактивной авиации.

Однако информационное поле не будет открывать архивы, пока не удостоверится в необратимости изменения поведения человека. После достижения периода зрелости Куратор более не будет инициировать дополнительную агрессию, но до преодоления инерции общественного мышления понадобится время. Которое, в том числе, будет использовано для смены политических элит; светскую власть получают технократы. Иначе возможен

рецидив. И если в конфликте будут использованы новые источники энергии (например, *фотонная бомба*, о которой речь пойдет далее), то не только человеческая цивилизация, но и вся биосфера Земли будут уничтожены.

Духовная власть (Куратор) стоит перед сложным выбором. Если ускорить передачу новых знаний, то в условиях неравномерного развития государств и сложившегося антагонизма между их элитами можно получить новую мировую войну с тяжелейшими последствиями. Если же этого не делать, то запасы традиционных видов энергии и других ресурсов будут исчерпаны, цивилизация начнет деградировать и биосфера планеты окажется пустоцветом.

Поэтому в начале новой эпохи будет инициирован проект, который нацелит имеющуюся агрессию за пределы ноосферы Земли. *Рональд Рейган* пытался это сделать еще 40 лет назад, когда призывал человечество готовиться к звездным войнам. Но там враг был абстрактным (инопланетяне), а сейчас покажут конкретную угрозу. Источниками этой угрозы являются галактические астероиды. Такие астероиды прилетают из дальнего космоса и не внесены в каталоги потенциально опасных объектов. Для предотвращения столкновения планеты с объектом у Земли будет максимум 2 недели, поэтому к отражению атаки нужно готовиться заблаговременно.

**Ракетный щит Земли.** Автор разделяет известное мнение о том, что наши родители, которые затратили столько сил для создания земной колыбели человечества, оставили в ближнем космосе систему защиты от астероидных атак. Логичнее всего разместить соответствующую базу на Луне, где сила тяжести в 6 раз меньше земной. Но если такая база и существует, то в прошлом несколько астероидов, летящих к Земле, она пропустила. Один из них образовал Мексиканский залив и, в результате изменения климата, уничтожил динозавров. Тунгусский метеорит был не таким крупным, как Мексиканский, и его разбили на части при входе в атмосферу. Поэтому можно считать, что и в наше время эта система продолжает работать, и людям особо опасаться нечего.

Но любая техника может дать сбой, и дублирование этой системы не будет лишним.

**Кроме того, создание своей защитной системы от астероидов стимулирует научно – технический прогресс сильнее, чем угроза войны.**

А если направить на эти цели те средства, которые планировалось использовать на создание новых видов вооружения, то эта программа не приведет к ухудшению условий жизни людей.

После появления космических ракет и термоядерного оружия человечество не является таким беззащитным, каким было раньше, и со многими астероидами Солнечной системы, представляющими потенциальную угрозу (они имеют диаметр в несколько сотен метров), сможет справиться самостоятельно. Но для перехвата астероида на дальних подступах Земли нужны новые двигатели; традиционные жидкостные двигатели не обеспечат нужных скоростей. Из того, что уже находится в стадии технических проектов (а некоторые образцы опробованы в условиях космического полета) и пригодно для решения поставленной задачи, можно использовать плазменные двигатели, рабочим телом которых является тяжелый инертный газ ксенон. Но необходимую электрическую энергию для таких двигателей должны давать не солнечные батареи (как это практикуют на дальних космических зондах), а бортовой ядерный реактор. Известно, что работы в этом направлении уже ведутся и выйдут на этап полетных испытаний через 10 – 15 лет. К тому времени можно завершить развертывание первой очереди системы астероидной защиты Земли и приступить к ее испытаниям. Подходящих мишеней в ближнем и дальнем космосе найдется достаточно, так что военные люди настреляются вволю. Для остальных землян это будет не только захватывающим зрелищем, но и вехой для начала отсчета новой исторической эпохи.

**Фотонный реактор, или формула Эйнштейна как руководство к действию.** Что касается защиты от галактических астероидов, то тут дело обстоит сложнее. Среди них встречаются крупные металлические объекты диаметром в несколько километров; кроме того, скорость сближения с Землей у них на порядок выше, чем у астероидов из Солнечной системы.

Для борьбы с такими астероидами человечество получит доступ к абсолютному оружию, использующему энергию расщепления протонов или нейтронов на фотоны. В новой реакции будет происходить преобразование всей массы вещества  $m$  в энергию  $E$  по формуле Эйнштейна

$$E = mc^2.$$

Поскольку коэффициент  $c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2 / \text{с}^2$  очень велик, то и энергия выделяется колоссальная. Если сравнивать с реакцией слияния легких ядер, происходящей в термоядерной бомбе, то, в пересчете на массу реагентов количество выделенной энергии увеличивается на три порядка. Кроме того, такая реакция не потребует специального выбора и дорогостоящей подготовки реагентов; протоны и нейтроны входят в состав любого вещества.

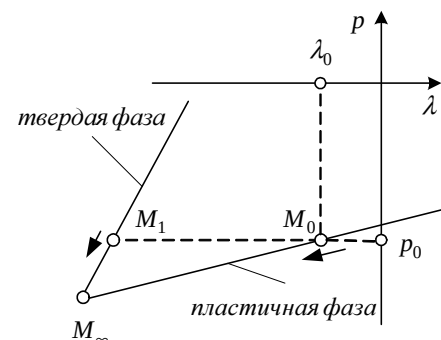


Рис. 3 – Гистерезисный переход области эфира по пути  $M_0 M_\infty M_1$ .

Стрелки обозначают направление расширения пространства, а различие в наклоне объясняется неравенством  $c \ll a$ .

Точка  $M_\infty$  отвечает потере стабильности материи (концу света).

Уже давно подсчитали: чтобы, например, закрыть годовые потребности Украины во всех видах энергии (включая тепловую, гидравлическую или атомную генерацию, а также природный газ и моторное топливо) достаточно будет сжечь в фотонном реакторе 36 кг любого мусора.

Если такая энергия выделится одновременно (при фотонном взрыве), то она раздробит любой астероид на мелкие обломки, которые сгорят в атмосфере Земли и не причинят заметного вреда. В другом варианте энергия взрыва фотонной бомбы на поверхности крупного астероида изменит траекторию его полета и отклонит от точки столкновения с Землей.

Реакцию распада нейтрона на фотоны (или распада протона на фотоны и позитроны, уносящие электрический заряд) физики не наблюдали, поэтому она запрещена общепризнанным законом сохранения общего числа *адронов* и гипотетически может происходить только лишь при взаимодействиях вещества и антивещества, приводящих к аннигиляции. Но тут нужно заметить, что прежде атом, а затем его ядро, также считали неделимыми. Все зависит от создаваемых условий.

Куратор до поры не раскрывает в этом вопросе всех тайн, но кое-что понять удалось. Известно, что стабильность элементарных частиц материального мира обеспечивается за счет энергии расширяющегося пространства. Особенностью такого расширения является то, что оно не изменяет внешних размеров любой части пространства; уменьшение плотности упругой компоненты эфира происходит за счет заполнения менее плотных частей (пор или дорожек, остающихся после пролета фотонов). Причем, указанное *расширение происходит не повсеместно, а только лишь в тех областях, где находится элементарная частица*. В работе [2] описан механизм передачи энергии от эфира к частице, обеспечивающий стабильность ее характеристик и сохранение массы (полной энергии) вещества. Этот механизм использует *энергию гистерезисного перехода* при скачкообразном уменьшении плотности  $\lambda$  в условиях постоянства начального и конечного давления  $p = p_0$  (рис. 3). Заметим, что в результате такого перехода объем механической энергии, запасенной в эфире, понижается, и для сохранения стабильности частица должна находиться в непрерывном движении относительно эфира.

После прохождения отдельного фотона (или протона) по участку эфира энергетический потенциал этого участка понижается несущественно. Но если частицы образуют плотный поток, то своеобразное «выжигание» пространства может создать угрозу их стабильности.

Приведу наглядный пример. Если плотное стадо коров будет двигаться по лугу очень медленно, то коровы съедят всю траву и начнут голодать. Правда, трава непрерывно растет, и тут может наступить равновесие. Что касается эфира, то сожженный запас энергии гистерезисного перехода будет восполняться через миллиарды лет, и этот фактор здесь не работает.

В космосе аналогом плотного стада коров является *нейтронная звезда*, имеющая колоссальную плотность массы (она близка к плотности самого нейтрона и превосходит плотность атома водорода на 15 порядков). Стабильность такого объекта обеспечивает высокая скорость движения по эфиру, а если звезду остановить, то ее нейтроны начнут распадаться на фотоны, которые будут покидать зону реакции со скоростью света и сохранять свою стабильность.

Рассуждая об этой проблеме на уровне общих принципов, очертим проект будущей лабораторной установки, реализующей тот же принцип, но в малом масштабе. Плотный сгусток нейтронов можно создать в *нейтронном накопителе*, а затем направить этот сгусток со скоростью, противоположной по величине и направлению скорости движения лаборатории относительно эфира. И тогда нейтроны, которые фактически будут стоять на одном месте пространства, будут распадаться и высвечивать свою энергию связи в виде фотонных волн высокой частоты.

Разумеется, это всего лишь схема проведения демонстрационного опыта, и для фотонного реактора, вырабатывающего энергию для нужд промышленности или транспорта, она не подходит. Кроме того, чтобы реализовать эту схему, нужно знать скорость движения Земли относительно эфира, а противоречивые результаты опытов по обнаружению *эфирного ветра* все основательно запутали [2] и вынудили Эйнштейна и его последователей исключить соответствующую терминологию из своих теорий. И, наконец, не вполне ясно, каким образом можно разогнать пучок электрически нейтрального вещества до нужной скорости, если она составит, например, 250 км/с, что отвечает вращению Солнца вокруг центра Галактики, или 700 км/с, что отвечает движению центра Галактики. Поэтому полностью исчерпать энергию физического пространства в условиях земной лаборатории столь же нереально, как невозможно разрушить кинескоп телевизора за счет демонстрации фильма, где показывают мощные взрывы. Но нейтронная звезда, которая перестанет скользить по эфиру, будет подобна яркой точке, что появляется на экране кинескопа после отключения развертки. Такая точка в случае длительной экспозиции способна выжечь люминофор и разрушить кинескоп.

**Новые пророки и другие гипотетические сюрпризы.** Впрочем, эти частные вопросы носят чисто познавательный интерес и к рассматриваемой теме не относятся. Важно понять другое:

**в арсенале нашего Куратора имеется достаточно средств, чтобы помочь людям преодолеть любые проблемы.**

Потому, что он опирается на опыт наших родителей, которые в свое время пережили аналогичные трудности, связанные с особенностями подросткового периода, с его неизбежной (и даже полезной!) драчливостью, и

сумели создать на Земле для своих детей новую колыбель жизни.

Кстати говоря, когда я рассказываю об этой гипотезе своим коллегам, то чаще всего слышу один и тот же вопрос: а как там наши родители, прилетают ли они к нам? Мой ответ таков: они прилетают, но ведут себя как умные родители – только лишь в гости, и во взрослую жизнь своих детей не вмешиваются. Правда, последнее им удастся не всегда, но тут многое зависит от темперамента и личных качеств.

В отряд космонавтов во все времена будет существовать строгий отбор, и там от них, прежде всего, будут требовать неукоснительного выполнения инструкций. Но тот случай оказался исключением из правила.

Как известно, одного из последних богов, спустившихся на Землю, звали *Иисус*. Он пришел в Палестину неизвестно откуда, возмутился увиденному и решил, чтобы скорректировать вектор развития, сыграть роль нового пророка. Тут надо признать, что пророков в те времена и в тех землях хватало и без него, но то, что проповедовал он, было на голову выше учений его предшественников. Включая и прощальные заповеди улетающих языческих богов, которые были положены в основу существующих вероучений.

У него был характер мессии, и он легко увлекал людей за собой. При этом, как и любой мессия, он в своих порывах забегал далеко вперед и торопил время.

Кроме требования смирить гордыню и во всем доверять Богу (то есть Куратору, но о его реальной сущности Иисус, естественно, умалчивал) он призывал

**изгнать меня из храмов, и заняться ремеслами и мореплаванием.**

То есть он пытался ускорить прогресс общества, но светскую власть и духовную элиту все устраивало и ничего изменять они не захотели. В результате он был осужден на смерть, но принял приговор спокойно, потому что был уверен в своем скором спасении. Но что-то у его товарищей пошло не так, и спасательная экспедиция запоздала на двое суток; в результате Иисус принял мученическую смерть, а с собой они забрали мертвое тело. Своим «воскрешением», которое невозможно было скрыть от людей, он подтвердил божественное (читай – инопланетное) происхождение и пробудил интерес к своему учению. В результате он вернул в лоно церкви, то есть под управление Куратора, миллиарды людей, и, в конечном итоге, добился признания своих идей и реализации целей своей земной миссии. Да, уже после смерти, но для пророков это общее правило, и этот случай не стал исключением.

Осталось объяснить, почему Христа называли *спасителем* и чьи грехи он искупил своей смертью. Если бы результат его миссии (по прошествии определенного времени) был признан провальным, и власть мелких торговцев и ростовщиков продолжалась бы и далее (а это ведет к застою), то

**на Земле ввели бы прямое инопланетное правление.**

И кроме Куратора к управлению вернули бы когорты тренеров – исполинов, а у светской и духовной элиты слетели бы головы с плеч. Не фигурально, а буквально. Вот для них он и был спасителем. *Основная масса людей во все времена живет в тех обстоятельствах, которые создает элита, поэтому безгрешна по определению.*

И это урок для теперешней элиты. Когда появятся новые пророки (а если ничего не изменять прямо сейчас, то они появятся!), подтвердят свои полномочия и будут готовить людей к новому приходу Мессии (читай – десанту инопланетян-управленцев), то поворачивать руль будет поздно, и сбежать от ответственности не получится. Их всех будут ждать аналогичные оргвыводы. *Поэтому нужно внимательно слушать Куратора и не допускать серьезных отклонений от заданного тренда.*

Организацию этой коммуникации, как и ранее, будет выполнять общественный институт с названием *церковь*, но терминология и методы решения ее задач станут другими. После реформирования церковью антагонизм в отношениях науки и религии на длительный период времени снимается, а неизбывный конфликт интересов технократической и теократической элит (по линии новаторы – консерваторы) обеспечит устойчивость управления отдельными государствами и высокие темпы развития цивилизации в целом.

**Заключение.** Обеспечить распространение на другую планету полноценной жизни (которая, после взросления, сможет продолжить эстафету) – это очень трудное и затратное мероприятие.

Послать экспедицию на другую, биологически стерильную, планету несложно, и уже скоро мы научимся это делать. Но такая экспедиция продукты питания и запасы воздуха привезет с собой, и максимум, на который можно рассчитывать в среднесрочной перспективе – это создание обитаемой базы с постоянным или сменным экипажем на поверхности или под поверхностью планеты.

В другом случае, который анализируется в литературе, человек отбирает планету у коренных обитателей и использует для себя. Возможно, это когда-нибудь и получится сделать на практике, но садоводы знают, что гибриды не передают новые гены по наследству. Поэтому сначала готовят почву, потом выращивают дикий сорт, который хорошо укореняется в конкретном грунте и климате, а затем ему прививают элитные ветви, которые по своему генотипу совместимы с диким деревом. И на всех этапах садовник контролирует процесс.

Вопрос о том, каким образом сложился такой порядок вещей, который мы наблюдаем сейчас, в гносеологическом плане важный и интересный. Но в этой статье он не рассматривается, потому что находится на таком уровне абстракции, который для землян (и их Куратора) неактуален. Да и наши родители – это не боги, и они не все знают. Но то, что они знают о своих родителях и прародителях, нам тоже знать интересно, и мы обсудим с

ними когда-нибудь позже при личной встрече. Заодно доподлинно узнаем, на какой из планет живут они сами, а также наши ближайшие родственники. В литературе можно встретить массу гипотез по этому поводу.

Если без специальной подготовки высаживаться на планету, где уже укоренилась белковая жизнь, то экспедицию могут уничтожить вирусы. Впрочем, о таких прописных истинах сейчас знают даже школьники младших классов. Куратор делает свое дело, и новое поколение землян активно готовится к началу экспансии нашей формы жизни на другие планеты. Дело за малым – перевоспитать или заменить элиту, которая продолжает жить в системе ценностей вчерашнего дня. Но и эту задачу нужно решать без эксцессов, а путем управляемой эволюции их тел (и образа мыслей).

Представленный вашему вниманию материал не исчерпывает тему, поэтому выводы делать рано, и их в этой статье не будет. Тема касается каждого, поэтому желательно, чтобы в дальнейшем продвижении к истине участвовали многие. Задавайте интересующие вопросы, но не мне, а своему подсознанию. И, пусть не сразу, но вы получите на них ответы. Из того, что в ходе такой дискуссии узнал я, в этой статье сказано не все. Но для первого издания уже сказано достаточно. Информацию такого рода необходимо дозировать.

И последнее, о чем нужно сказать, завершая статью. По этой теме можно дать множество ссылок, буквально по каждому абзацу, но я не сделал этого умышленно, потому что не собираюсь никому ничего доказывать. Авторская оценка представленного материала такова: в этой публикации предпринята попытка *уточнения аксиоматики*, после которой область использования термина *Бог* (как определения сущности, наделенной сверхъестественными способностями) по объективным причинам сократится. Источники, указанные в списке литературы, были опубликованы раньше статьи, но, по сути, являются ее математическими приложениями.

#### Список литературы

1. Григорьев А. Л., Геворкян Ю. Л. Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2011. – № 13. – С.55 – 68.
2. Ванін В. А., Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования. – Харьков : НТУ «ХПИ». – 2012. – Т. 3 – 464 с.

#### References (transliterated)

1. Grigoriev A. L., Gevorkyan Yu. L. Gnoseologicheskie aspekty modelirovaniya obmennykh kolebaniy v srede Maksvela i Kossere [Epistemological aspects of modeling of exchange oscillations in the environment of Maxwell and Cosserat]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KHPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh [Bulletin of the NTU «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KHPI» Publ., 2011, no. 13, pp. 55–68.
2. Vanin V. A., Gevorkyan YU. L., Grigor'yev A. L. *Skalyarnyy i vektorny analiz dlya klassicheskogo inzhenerenogo obrazovaniya* [Scalar and vector analysis for classical engineering education]. Kharkov, NTU «KHPI» Publ., 2012, vol. 3. 464 p

Поступила (received) 18.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.